ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 21–25

МАТЕМАТИКА

УДК 512.761,517.55

ГЕОМЕТРИЯ ФАКТОРИЗАЦИОННЫХ ТОЖДЕСТВ ДЛЯ ДИСКРИМИНАНТОВ

© 2020 г. Е. Н. Михалкин[1,*], В. А. Степаненко[1,], А. К. Цих[1,***]**

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым 21.05.2020 г.
Поступило 22.05.2020 г.
После доработки 22.05.2020 г.
Принято к публикации 04.06.2020 г.

Рассматриваются дискриминант Δ_n общего многочлена степени n и многогранник Ньютона $\mathcal{N}$ этого дискриминанта. Приводится геометрическое доказательство факта того, что срезки Δ_n на грани $\mathcal{N}$ являются произведениями дискриминантов степеней меньше n. Основой доказательства являются свойства сигма-процесса для логарифмического отображения Гаусса нулевого множества дискриминанта.

Ключевые слова: дискриминант, многогранник Ньютона, логарифмическое отображение Гаусса, параметризация Горна–Капранова

DOI: 10.31857/S268695432004013X

Мероморфное отображение $f\colon X \to Y$ аналитических множеств (пространств) целесообразно рассматривать как аналитическое подмножество в $X \times Y$, являющееся замыканием $\overline{G}_f$ графика f. Слои в $\overline{G}_f$ над точками неопределенности могут рассматриваться как “раздутие” или “стягивание” [1]. Наиболее прозрачная схема указанных раздутий и стягиваний просматривается для отображений, являющихся обращениями логарифмического отображения Гаусса [2]. В теории гипергеометрических функций эти обращения называются параметризациями Горна–Капранова [3, 4].

Цель настоящей работы состоит в изучении параметризации Горна–Капранова и на примере параметризации классического дискриминанта доказываются дискриминантные тождества для срезок дискриминанта. Такие тождества можно получить, используя сложную технику теории A-детерминантов [5, гл. 10].

Дискриминантом многочлена

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n \qquad (1)$$

называется неприводимый многочлен $\Delta_n = \Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ с целочисленными коэффициентами, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда f имеет кратные корни. Дискриминанты играют важную роль в математике, о чем свидетельствуют фундаментальные монографии [5, 6]. Приведенное здесь дискриминантное тождество (2) мотивировано исследованиями структуры универсальной алгебраической функции [6–9], в теории сингулярностей [10] и в тропической математике [11]. Указанное тождество в виде гипотезы было приведено в статье [12].

Известно [5], что многогранник Ньютона $\mathcal{N}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ указанного дискриминанта комбинаторно эквивалентен $(n-1)$-мерному кубу. Поскольку такой куб имеет 2^{n-1} вершин, естественно кодировать вершины $N(\Delta_n)$ всевозможными подмножествами из множества $\{1, \ldots, n-1\}$. Многогранник $\mathcal{N}(\Delta_n)$ имеет $n-1$ гиперграней $\{h_k^0\}$, лежащих в координатных гиперплоскостях $\{t_k = 0\}$, $k = 1, \ldots, n-1$ (предполагается, что в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выбраны координаты $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)$). Каждая гипергрань h_k^0 имеет 2^{n-2} вершин, которые кодируются подмножествами $I \subset \{1, \ldots, n-1\}$, не содержащими k. Через h_k обозначим противоположную грань к h_k^0, вершины которой кодируются подмножествами I, содержащими k (явное уравнение для содержащей h_k гиперплоскости дается формулой (6) в разделе 1).

Нас интересуют срезки дискриминанта Δ_n на гиперграни его многогранника $\mathcal{N}(\Delta_n)$. Напом-

[1] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*
**E-mail: mikhalkin@bk.ru*
***E-mail: v-stepanen@mail.ru*
****E-mail: atsikh@sfu-kras.ru*

ним, что срезкой многочлена Δ на грань h его многогранника $\mathcal{N}(\Delta)$ называют сумму всех мономов из Δ, показатели которых принадлежат h; такую срезку будем обозначать $\Delta|_h$. Срезки $\Delta_n|_{h_k^0}$ на координатные гиперграни h_k^0 являются неприводимыми многочленами. Цель настоящего сообщения – доказать следующее утверждение о факторизации срезок дискриминанта Δ_n на некоординатные гиперграни h_k.

Т е о р е м а. *Каждая срезка $\Delta_n|_{h_k}$ дискриминанта многочлена степени n факторизуется в виде произведения*

$$a_k^2\Delta_k(a_0, a_1, \ldots, a_k)\Delta_{n-k}(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n), \qquad (2)$$

где Δ_k, Δ_{n-k} – дискриминанты многочленов

$$f_k = a_0 + a_1y + \ldots + a_ky^k,$$

$$f_{n-k} = a_k + a_{k+1}y + \ldots + a_ny^{n-k}$$

степеней k и $n - k$.

Заметим, что для $k = 1$ первый дискриминант в правой части (2) тождественно равен единице: $\Delta_1(a_0, a_1) \equiv 1$. Аналогичная ситуация с множителем $\Delta_1(a_{n-1}, a_n)$ для $k = n - 1$. Таким образом, срезки Δ_n на гиперграни h_1 и h_{n-1} с точностью до мономов a_1^2 и a_{n-1}^2 совпадают с дискриминантами Δ_{n-1} многочленов степени $n - 1$.

Для доказательства этой теоремы мы вначале в разделе 1 приводим аналогичное утверждение для экстремальной части дискриминанта (лемма 1). Таким образом заключаем, что многогранники Ньютона полиномов слева и справа в (2) совпадают. Затем в разделе 3 доказываем, что нулевое множество срезки $a_k^{-2}\Delta_n|_{h_k}$ содержит объединение нулевых множеств участвующих в (2) дискриминантов Δ_k и Δ_{n-k} (для этого мы используем параметризации нулевых множеств указанных трех дискриминантов). Тогда по теории пересечений получаем равенство (2).

Чуть более технический анализ позволяет распространить утверждение теоремы для срезок на грани

$$h_K := h_{k_1} \cap \ldots \cap h_{k_p},$$

полученные пересечением p гиперграней. Мультииндекс $K = \{k_1, \ldots, k_p\}$ определяет разбиение набора $\{0, 1, \ldots, n\}$ на $p + 1$ поднаборов (отрезков)

$$K_i = \{k_i, k_i + 1, \ldots, k_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, p,$$

считая $k_0 = 0$, $k_{p+1} = n$. Обозначим через $l_i :=$ $:= k_{i+1} - k_i$ длину K_i и

$$f_{K_i} := a_{k_i} + a_{k_i+1}y + \ldots + a_{k_{i+1}}y^{l_i}.$$

В указанных обозначениях срезка Δ_n на грань h_K факторизуется в виде

$$\Delta_n|_{h_K} = a_K^2\prod_{i=0}^{p}\Delta_{l_i}(f_{K_i}),$$

где $a_K^2 = a_{k_1}^2 \ldots a_{k_p}^2$, а Δ_{l_i} – дискриминанты многочленов степеней l_i.

1. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ДИСКРИМИНАНТ И ФАКТОРИЗАЦИЯ ЕГО СРЕЗОК

Сумму мономов дискриминанта Δ_n, показатели которых пробегают множество вершин многогранника $\mathcal{N}(\Delta_n)$, обозначим $\hat{\Delta}_n$, и назовем экстремальным дискриминантом.

Л е м м а 1. *Для каждого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ срезка $\hat{\Delta}_n|_{h_k}$ экстремального дискриминанта на гипергрань h_k факторизуется в виде произведения*

$$a_k^2\hat{\Delta}_k(a_0, a_1, \ldots, a_k) \cdot \hat{\Delta}_{n-k}(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

с экстремальными дискриминантами $\hat{\Delta}_k$ и $\hat{\Delta}_{n-k}$ многочленов степеней k и $n - k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 основано на формулах для мономов $\hat{\Delta}_n$, т.е. для экстремальных мономов самого дискриминанта Δ_n. Эти формулы были получены Гельфандом, Капрановым и Зелевинским (см. [5, теоремы 2.2 и 2.3 главы 12]) с помощью сложной алгебраической техникой теории A-детерминантов. Отметим, что другое доказательство этой теоремы дал В. Батырев [13], используя лишь классический метод Ньютона выделения ветвей алгебраической функции. Это утверждение о мономах состоит в следующем.

У т в е р ж д е н и е. *Многогранник Ньютона дискриминанта многочлена* (1) *комбинаторно эквивалентен* (n – 1)*-мерному кубу*; *он содержит* 2^{n-1} *вершин, которые находятся в биективном соответствии со всевозможными подмножествами*

$$I \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Вершина $v(I)$, соответствующая подмножеству $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_s\}$, имеет координаты

$$v_0 = i_1 - 1, \quad v_n = n - i_s - 1,$$

$$v_{i_\nu} = i_{\nu+1} - i_{\nu-1} \quad \text{для} \quad i_\nu \in I, \qquad (3)$$

$$v_i = 0, \quad \text{для} \quad i \notin I \cup \{0, n\}.$$

Пусть $l_\nu = i_{\nu+1} - i_\nu$ $(0 \le \nu \le s)$, $i_0 = 0$, $i_{s+1} = n$. Тогда моном $a^{v(I)}$ встречается в Δ с коэффициентом

$$C_{v(I)} = C(I) = \prod_{\nu=0}^{s}(-1)^{\frac{l_\nu(l_\nu-1)}{2}}l_\nu^{l_\nu}.$$

Ввиду известного свойства биоднородности дискриминанта, многогранник $\mathcal{N}(\Delta_n)$ лежит в плоскости пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ коразмерности 2, заданной парой уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} t_j = 2(n-1), \quad \sum_{j=1}^{n} jt_j = n(n-1).$$

С помощью (3) нетрудно показать, что в этой плоскости многогранник $\mathcal{N}(\Delta_n)$ высекается следующими неравенствами:

$$\begin{gathered} t_k \geq 0, \quad k = 1,\dots,n-1, \\ \sum_{j=1}^{k}(n-k)jt_j + \sum_{j=k+1}^{n-1} k(n-j)t_j \leq nk(n-k), \qquad (4) \\ k = 1,\dots,n-1. \end{gathered}$$

Отметим, что в этих неравенствах участвуют лишь $n-1$ координат $t_1,\dots,t_{n-1}$, поэтому неравенства (4) определяют проекцию $\mathcal{N}(\Delta_n)$ на подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$ указанных координат. Отсюда следует, что система неравенств (4) одновременно определяет многогранник Ньютона многочлена $\Delta_n(1,a_1,\dots,a_{n-1},1)$, т.е. дискриминанта приведенного уравнения

$$f^{red} = 1 + a_1y + \dots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n = 0. \qquad (5)$$

Из (4) получаем следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Гипергрань h_k имеет 2^{n-2} вершин и лежит в гиперплоскости*

$$F_k = \{t \in \mathbb{R}^{n-1}: \langle \mu^{(k)}, t\rangle = nk(n-k)\}, \qquad (6)$$

у которой нормальный вектор $\mu^{(k)}$ имеет координаты

$$(n-k)\cdot 1,\dots,(n-k)\cdot k, \quad k\cdot(n-k-1),\dots,k\cdot 1.$$

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИИ НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ ДИСКРИМИНАНТОВ, УЧАСТВУЮЩИХ В (2)

Утверждение теоремы достаточно доказать для дискриминанта

$$\Delta_n^{red}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \Delta_n(1,x_1,\dots,x_{n-1},1),$$

соответствующему приведенному многочлену (5). В этом случае формула (2) сводится к равенству

$$\begin{aligned} &\Delta_n^{red}|_{h_k}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \\ &= a_k^2\Delta_k(1,x_1,\dots,x_k)\Delta_{n-k}(x_k,\dots,x_{n-1},1). \end{aligned} \qquad (7)$$

Основой нашего доказательства служит параметризация Горна–Капранова для приведенного дискриминантного множества

$$\nabla_n^{red} := \{x \in \mathbb{C}^{n-1}: \Delta_n^{red}(x) = 0\},$$

полученная в [3] с использованием лишь определителя Сильвестра для Δ и элементарных свойств логарифмического отображения Гаусса для ∇_n^{red}. Эта параметризация n-значная и она следующая:

$$x_j = -\frac{ns_j}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{j}{n}}, \quad j = 1,\dots,n-1, \qquad (8)$$

где β и α – целочисленные векторы

$$(1,2,\dots,n-1) \quad \text{и} \quad (n-1,n-2,\dots,1)$$

соответственно, а $s = (s_1:\dots:s_{n-1})$ – параметр из $\mathbb{CP}^{n-2}\backslash\{s: \langle\alpha,s\rangle\langle\beta,s\rangle = 0\}$.

С учетом биоднородности, полный и приведенный дискриминанты $\Delta_n(a)$ и $\Delta_n^{red}(x)$ связаны между собой заменой:

$$x_j(a) = a_j a_0^{\frac{j-n}{n}} a_n^{-\frac{j}{n}}, \; j = 1,\dots,n-1.$$

Поэтому, ввиду (8), полное дискриминантное множество $\nabla_n = \{\Delta_n(a) = 0\}$ допускает параметризацию

$$\begin{gathered} a_0 = s_0, \\ a_j = -\frac{ns_j}{\langle\alpha,s\rangle}s_0\left(\frac{s_n}{s_0}\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{j}{n}}, \quad j = 1,\dots,n-1, \\ a_n = s_n, \end{gathered}$$

где $(s_0,s_n) \in (\mathbb{C}\backslash 0)^2$. Полагая здесь $n = k$, $a_0 = s_0 = 1$, мы получим, что параметризация дискриминантного множества $\Delta_n(1,x_1,\dots,x_k) = 0$ “полуприведенного” многочлена $1 + x_1y + \dots + x_ky^k$ имеет вид

$$x_j = -\frac{ks_j}{\langle\alpha',s'\rangle}\left(\frac{s_k\langle\alpha',s'\rangle}{\langle\beta',s'\rangle}\right)^{\frac{j}{k}}, \qquad (9)$$

$j = 1,\dots,k-1$, $x_k = s_k$; здесь

$$\begin{gathered} \beta' = (1,2,\dots,k-1), \\ \alpha' = (k-1,k-2,\dots,1), \\ s' = (s_1:\dots:s_{k-1}). \end{gathered}$$

Аналогичная формула имеет место для параметризации дискриминантного множества

$$\Delta_{n-k}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, 1) = 0.$$

3. РАЗДУТИЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ И ОБОСНОВАНИЕ ТОЖДЕСТВА (7)

Вначале приведем связь между приведенным дискриминантом и его срезкой на грань h_k. Пусть $x = (x_1,\dots,x_{n-1})$ и $\Delta_n^{red}(x)$ – приведенный дискриминант. Рассмотрим функцию

$$H_k^{\tau}(x) := \tau^{nk(n-k)}\Delta_n^{red}\left(\frac{x_1}{\tau^{\mu_1}}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{\tau^{\mu_{n-1}}}\right),$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ — координаты внешней нормали $\mu = \mu^{(k)}$ к грани h_k, определенные в лемме 2.

Лемма 3. *Функция $H_k^{\tau}(x)$ является гомогенизацией приведенного дискриминанта относительно веса μ, удовлетворяющая свойству*

$$H_k^{\tau}(x) \xrightarrow[\tau \to 0]{} \Delta_n^{red}(x_1, \ldots, x_{n-1})|_{h_k}. \tag{10}$$

Справедливость леммы 3 следует из того, что согласно лемме 2 число $nk(n-k)$ в правой части (6) есть взвешенная степень относительно веса μ для всех мономов из срезки $\Delta_n^{red}(x_1, \ldots, x_{n-1})|_{h_k}$, а для всех других мономов она меньше этого числа. Поэтому предел при $\tau \to 0$ последовательности в (10) вычисляется ее значением при $\tau = 0$, которое равно указанной срезке.

Для доказательства тождества (7) проведем анализ параметризации (8) приведенного дискриминантного множества. В точках s объединения гиперплоскостей $\langle \alpha, s\rangle = 0$ и $\langle \beta, s\rangle = 0$, где $s_j \neq 0$, она не принимает конечных значений. Однако в точках неопределенности, где одновременно равны нулю, скажем, переменные $s_{k+1}, \ldots, s_{n-1}$ и $\langle \beta, s\rangle$ (или $s_1, \ldots, s_{k-1}$ и $\langle \alpha, s\rangle$), эта параметризация дает предельные положения для дискриминантного множества. Согласно теории соответствий [1] такие предельные положения интерпретируются как раздутия в пространстве $\mathbb{CP}_s^{n-2} \times \mathbb{C}_x^{n-1}$, где “живет” график отображения (8).

Лемма 4. *В равенстве* (7) *множество нулей срезки $\Delta_n^{red}|_{h_k}$ слева содержит множество нулей произведения $x_k^2\Delta_k\Delta_{n-k}$ справа.*

Для доказательства леммы 4 мы исследуем нулевые множества последовательности $H_k^{\tau}(x)$ при $\tau \neq 0$. Согласно (8) эти множества допускают параметризации

$$x_j = -\tau^{\mu_j}\frac{ns_j}{\langle \alpha, s\rangle}\left(\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle}\right)^{\frac{j}{n}}, \tag{11}$$

где $j = 1, \ldots, n-1$. Отсюда по лемме 2 для $j = 1, \ldots, k-1$ имеем

$$\frac{x_j}{x_k^{j/k}} = \left(\frac{n}{\langle \alpha, s\rangle}\right)^{1-\frac{j}{k}}\frac{s_j}{s_k^{j/k}},$$

что равносильно следующему:

$$x_j = \frac{n^{1-\frac{j}{k}}s_j}{\langle \alpha, s\rangle}\left(\frac{x_k\langle \alpha, s\rangle}{s_k}\right)^{\frac{j}{k}}. \tag{12}$$

Далее, в проективном пространстве переменных $(s_1 : \ldots : s_{n-1})$ определим плоскость σ' системой уравнений $s_{k+1} = \ldots = s_{n-1} = \langle \beta, s\rangle = 0$. Вычисления дают

$$s_k|_{\sigma'} = -\frac{1}{k}\langle \beta', s'\rangle, \quad \langle \alpha, s\rangle|_{\sigma'} = \frac{n}{k}\langle \alpha', s'\rangle.$$

Подставляя найденные сужения $s_k|_{\sigma'}$, $\langle \alpha, s\rangle|_{\sigma'}$ в формулу (12), приходим к следующим выражениям для сужений $x_j|_{\sigma'}$, $j = 1, \ldots, k-1$:

$$x_j|_{\sigma'} = -\frac{ks_j}{\langle \alpha', s'\rangle}\left(\frac{x_k\langle \alpha', s'\rangle}{\langle \beta', s'\rangle}\right)^{\frac{j}{k}}.$$

Таким образом, с учетом (9) получаем, что в результате проектирования на подпространство переменных $(x_1, \ldots, x_k)$ предельное множество (при $\tau \to 0$) нулей левой части (10) переходит в дискриминантное множество $\{\Delta_k(1, x_1, \ldots, x_k) = 0\}$.

Симметричным образом, рассматривая в условиях (11) отношения $\dfrac{x_j}{x_k^{\frac{n-j}{n-k}}}$, получим, что предельное (при $\tau \to 0$) множество нулей левой части (10) проектируется на подпространство переменных $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1})$ в дискриминантное множество

$$\{\Delta_{n-k}(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, 1) = 0\}.$$

Осталось заметить, что срезка $\Delta_n^{red}|_{h_k}$ делится на a_k^2, и мы приходим к утверждению леммы 4.

Доказательство равенства (7) проводится следующим образом. Согласно лемме 1 многогранники Ньютона многочленов слева и справа в (7) совпадают. В таком случае из теории пересечений и леммы 4 следует, что эти многочлены имеют равные множества нулей. Но поскольку по лемме 1 их экстремальные части совпадают, то и сами многочлены совпадают.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки России в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mumford D.* Algebraic Geometry. I. Complex Projective Varieties. B.; Heidelberg; N.Y., Springer-Verlag. 1976.
2. *Kapranov M.M.* A Characterization of A-Discriminantal Hypersurfaces in Terms of the Logarithmic Gauss Map // Math. Ann. 1991. V. 290. P. 277–285.

3. *Passare M., Tsikh A.* Algebraic Equations and Hypergeometric Series / In: The legacy of Niels Henrik Abel. Springer, 2004. P. 653–672.
4. *Садыков Т.М., Цих А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014. 408 с.
5. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
6. *Васильев В.А.* Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997. 538 с.
7. *Михалкин Е.Н., Цих А.К.* Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 2. С. 119–148.
8. *Антипова И.А., Михалкин Е.Н., Цих А.К.* Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 10. С. 3–30.
9. *Esterov A.I.* Galois Theory for General Systems of Polynomial Equations // Compositio Mathematica. 2019. V. 155. № 2. P. 229–245.
10. *Васильев В.А.* Стабильные когомологии пространств нерезультантных систем многочленов в $\mathbb{R}^n$ // ДАН. 2018. Т. 481. № 3. С. 238–242.
11. *Dickenstein A., Feichtner E., Sturmfels E.* Tropical Discriminants // J. AMS. V. 20. № 4. P. 1111–1133.
12. *Mikhalkin E.N., Tsikh A.K.* On the Structure of the Classical Discriminant // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2015. Т. 8. Вып. 4. С. 425–435.
13. *Batyrev V.* Winter School lectures in Arizona. 2004. http://swc.math.arizona.edu/oldaws/04Notes.html

GEOMETRY OF FACTORIZATION IDENTITIES FOR DISCRIMINANTS

E. N. Mikhalkin[a], V. A. Stepanenko[a], and A. K. Tsikh[a]

[a] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation*

Presented by Academicain of the RAS V.A. Vasil'ev

Let Δ_n be the discriminant of a general polynomial of degree n and $\mathcal{N}$ be the Newton polytope of Δ_n. We give a geometrical proof of the fact, that the truncations of Δ_n to faces of $\mathcal{N}$ are equal to the products of discriminants of lesser degrees. The main tool of the proof is the blow-up property of the logarithmic Gauss map for the zero set of Δ_n.

Keywords: discriminant, Newtone polytope, logarithmic Gauss map, Horn–Kapranov parametrization