

УДК 517.938.5

## ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ БИЛЛИАРДАМИ: РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛОВЫХ ИНВАРИАНТОВ

© 2020 г. В. В. Ведюшкина<sup>1,\*</sup>, В. А. Кибкало<sup>1,\*\*</sup>,  
академик РАН А. Т. Фоменко<sup>1,\*\*\*</sup>

Поступило 18.05.2020 г.  
После доработки 18.05.2020 г.  
Принято к публикации 04.06.2020 г.

Сформулирован локальный вариант гипотезы А.Т. Фоменко о моделировании интегрируемых систем бильярами. Доказано, что бильярдные системы реализуют произвольные числовые метки инвариантов Фоменко–Цишанга. Тем самым, числовые метки априори не являются топологическим препятствием к реализуемости слоения интегрируемой системы бильяром.

*Ключевые слова:* интегрируемость, гамильтонова система, бильярд, инвариант Фоменко–Цишанга, CW-комплекс

**DOI:** 10.31857/S2686954320040207

В последние годы были получены принципиальные результаты в исследовании явления интегрируемости в бильярдах и изучении свойств таких систем. Так, для ряда важных классов бильяров оказалась верна гипотеза Биркгофа (как полиномиальная версия [1], см. также [2–4], так и локальная версия [5, 6]). Тем самым, нашла широкое подтверждение глубокая связь между интегрируемостью бильярда в односвязном пространстве постоянной кривизны и принадлежностью гладких дуг границы к семейству кривых одного из двух типов: софокусных квадрик (в том числе вырожденных) или концентрических окружностей и радиусов (для бильяров в постоянном магнитном поле, см. [7, 8]).

В то же время В.В. Ведюшкиной в [9] было построено принципиально новое расширение класса интегрируемых бильяров – класс бильярдных книжек. Движение частицы задается на двумерном CW-комплексе, 2-клетки которого есть плоские столы интегрируемых бильяров (листы книжки), ограниченные дугами одного и того же семейства кривых. Каждой 1-клетке (гладкой граничной дуге 2-клетки – корешку книжки) приписана перестановка инцидентных ей 2-клеток. Она задает переход частицы с листа на лист после удара о границу.

Системы таких бильярдных книжек обладают слоением Лиувилля. Отметим, что добавление к бильярдам на каждом из листов книжки одинакового подходящего потенциала (в случае квадрик, например, подходит потенциал типа Гаука) или постоянного магнитного поля (в случае окружностей) будет сохранять это свойство.

В классе бильяров на столах-комплексах удалось реализовать топологические инварианты [10] слоений Лиувилля достаточно широкого класса интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) с двумя степенями свободы и их особенностей (например, [9, 11]). Обзор полученных результатов имеется в работе В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [12]. А.Т. Фоменко сформулировал фундаментальную гипотезу о реализации (моделировании) ИГС с помощью интегрируемых бильяров и выделил классы бильяров I–VIII (включающие бильярдные книжки, бильярды с магнитным полем, бильярды с потенциалом, бильярды на плоскости Минковского; о свойствах таких систем см. [13–15]).

Раздел С гипотезы посвящен вопросу о лиувиллевой эквивалентности (последней гомеоморфности слоений Лиувилля) ИГС и бильярда в подходящих зонах энергии. Напомним, что полный классифицирующий инвариант этого отношения – инвариант Фоменко–Цишанга (меченая молекула) – есть граф с числовыми и буквенными метками, см. [10].

Поскольку справедливость раздела С гипотезы в полном объеме пока не ясна, А.Т. Фоменко поставил вопрос о реализации произвольных значений каждой из “компонент” меченой молекулы

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: arinir@yandex.ru

\*\*E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

\*\*\*E-mail: atfomenko@mail.ru

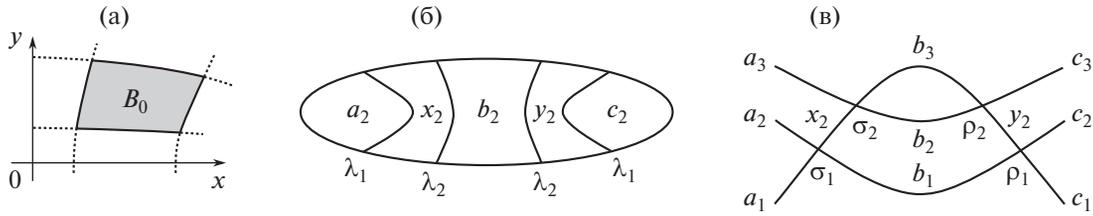


Рис. 1. а – стол типа  $B_0$ , б – листы  $a, x, b, y, c$  в проекции на плоскость, в – склейка бильярда  $\Omega_3 = \Omega_{3,3}$ .

по отдельности. Разделы **A** (доказан в [9]) и **B** (доказан для важного подкласса атомов без звездочек, об этом см. в [14]) гипотезы предполагают, что каждый буквенный инвариант при вершине (задающий класс послойной гомеоморфности окрестности особого слоя, или 3-атом, см. [10]) и каждая грубая молекула (граф с символами атомов в вершинах, но без числовых меток) реализуются в инвариантах бильярдов.

Оставался открытым вопрос: любые ли значения числовых меток моделируются бильiardными системами? Метки  $r = p/q \in \mathbb{Q} \bmod 1$  или  $r = \infty$ , и  $\varepsilon = \pm 1$  стоят на ребре молекулы, а метка  $n \in \mathbb{Z}$  – на некоторых специальных подграфах, называемых семьями. Верна следующая

**Теорема 1.** Любая числовая метка  $r, \varepsilon$  или  $n$  в любой меченой молекуле  $W$  ИГС реализуется как одна из меток того же типа в меченой молекуле  $W^*$  подходящего бильярда.

**Доказательство.** 1. Пары  $r = p/q, \varepsilon = 1$  и  $r = p/q, \varepsilon = -1$  реализуются бильiardной книжкой  $\Omega_{(p,q)}$  из  $q$  листов типа  $B_0$  (см. рис. 1а). Перестановка на выпуклой гиперболической дуге равна  $\sigma = (12\dots q)$ , а на выпуклой эллиптической дуге  $\sigma^p$ . Остальные перестановки тождественны. Грубая молекула имеет тип  $A-A$ .

Пара  $r = \infty, \varepsilon = 1$  реализуется бильiardом в круге (на трехмерном ненулевом уровне энергии), а пара  $r = \infty, \varepsilon = -1$  – бильiardом в круге при добавлении постоянного магнитного поля (см. [14]). Грубая молекула тоже имеет вид  $A-A$ . Тем самым, имеем дополнительный результат.

**Утверждение 1.** Гипотеза **C** верна для всех слоев с грубой молекулой  $A-A$ : любое такое слоение (задаваемое парой меток  $r, \varepsilon$ ) реализуется как слоение подходящего бильярда из классов I–VIII.

**Таблица 1.** Перестановки на границах склейки для столов  $\Omega_k$

Гипербола	$\rho_i$	$\sigma_i$
$i = 1$	$(b_1, c_1, y_2, c_2)$	$(a_2, x_2, a_1, b_1)$
$2 \leq i \leq k - 2$	$(b_i, y_i, y_{i+1}, c_{i+1})$	$(a_{i+1}, x_{i+1}, x_i, b_i)$
$i = k - 1$	$(b_{k-1}, y_{k-1}, b_k, c_k)$	$(a_k, b_k, x_{k-1}, b_{k-1})$

**З а м е ч а н и е 1.** Изменение меток  $(r, \varepsilon)$  при замене ориентации указаны в [10] и зависят от типов атомов (например, 2 атома  $A$ ) на концах ребра и значения метки  $r$ . Реализация меток  $(r, \varepsilon)$  в других случаях обсуждается ниже.

2. Метка  $n$  сопоставляется каждой семье инварианта Фоменко–Цишанга, т.е. связному подграфу из седловых атомов, прообраз которого образует единое расслоение Зейферта. В изученных ранее ИГС и бильiardах типичными значениями метки  $n$  были только 0, 1, 2.

Для  $k \in \mathbb{N}$  построим серию бильiardных книжек  $\Omega_k$ , инвариант Фоменко–Цишанга которых имеет некоторую семью с меткой  $n = k$ .

Рассмотрим  $k$  экземпляров  $X_1, \dots, X_k$  стола плоского бильiardа внутри эллипса  $bx^2 + ay^2 = ab$ . Выберем значения  $b < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k-1} < a$ , т.е.  $k - 1$  гиперболу, софокусную этому эллипсу. Разрежем столы  $X_2, \dots, X_{k-1}$  по двум гиперболам с параметрами  $\lambda_{i-1}$  и  $\lambda_i$ , а столы  $X_1$  и  $X_k$  – по одной гиперболе  $\lambda_1$  и  $\lambda_{k-1}$  соответственно. Полученные фрагменты стола  $X_i$  обозначим буквами  $a, x, b, y, c$  и оснастим индексом  $i$  (см. рис. 1б для стола  $X_2$ ).

Склейка книжки происходит по граничным дугам листов  $a_i, x_i, b_i, y_i, c_i$ , лежащих на гиперболах  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ . Схематично она указана на рис. 1в для стола  $\Omega_3$ . Точки пересечения кривых соответствуют дугам склейки (корешкам книжки), а сегменты кривых между ними – листам книжки. Двум ветвям гиперболы с параметром  $\lambda_j$  соответствуют перестановки  $\sigma_j, \rho_j$ , приведенные в табл. 1.

Инвариант Фоменко–Цишанга бильiardа  $\Omega_k$  содержит семью из  $k - 1$  3-атома  $C_2$  (образующих дерево без разветвлений). Метка  $n$  на ней равна  $k > 0$  или  $-k$  (в зависимости от ориентации), т.е. принимает любое ненулевое значение. Случай  $n = 0$  реализуется, например, бильiardом в области  $b_i$ . Теорема 1 доказана.

**Локальная гипотеза А.Т. Фоменко.** Развивая результат теоремы 1 и утверждения 1, поставим вопрос о реализации меток вместе с их “носителями”, т.е. “локальный” аналог общей гипотезы **C**.

**Гипотеза.** Каждое из нижеперечисленных подмножеств инварианта Фоменко–Цишанга ИГС

**Таблица 2.** Реализация реберных инвариантов бильярдами для различных концевых атомов

Метки	$A-A$	$A-V$	$V_1-V_2$
$r = p/q, \varepsilon = 1$	$\Omega_{(p,q)}$	Аналог $\Omega_{(p,q)}$ : $V = B$	[11] $V_1 = C_n, V_2 = C_n$
$r = p/q, \varepsilon = -1$	$\Omega_{(p,q)}$	—	[11] $V_1 = C_n, V_2 = C_n$
$r = \infty, \varepsilon = 1$	[14] и Предл. 7.1 [11]	[9]	$V_1$ и $V_2$ без звездочек, см. [14]
$r = \infty, \varepsilon = -1$	[14]	[9]	Предл. 7.2 [11] $V_1 = V_2 = B_n$

реализуется как подмножество инварианта Фоменко–Цишанга некоторого интегрируемого бильярда:

1. (реберный инвариант) ребро с выбранной парой меток  $(r, \varepsilon)$ ;
2. (усиление пункта 1) ребро с выбранной парой меток  $(r, \varepsilon)$  между двумя выбранными атомами;
3. (инвариант семьи) выбранная метка  $n$  на некоторой семье;
4. (усиление пункта 3) выбранная метка  $n$  на произвольной выбранной семье  $S$ ;
5. (меченая окрестность семьи). Выбранная семья с выбранной меткой  $n$  на ней и выбранными реберными инвариантами  $(r, \varepsilon)$  на ее внешних ребрах;
6. (меченая окрестность ребра). Две семьи  $S_1$  и  $S_2$  с метками  $n_1$  и  $n_2$ , выбранные граничные торы которых соединены ребром с произвольным выбранным реберным инвариантом  $(r, \varepsilon)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Пункты 1 и 3 вместе составляют доказанную выше теорему 1.

**У т в е р ж д е н и е 2.** В таблице 2 указано, какие случаи из пункта 2 локальной гипотезы уже реализованы бильярдами. Символами  $V, V_1, V_2$  обозначены произвольные седловые атомы (атомы  $B_n$  и  $C_n$  описаны в [11]).

Так, случай  $r = p/q, \varepsilon = 1$  и атомов  $A, B$  реализуется книжкой из  $q$  экземпляров стола  $x_2$  (см. рис. 1б) с перестановками  $\sigma$  и  $\sigma^p$  как у книжки  $\Omega_{(p,q)}$ . Метка  $\varepsilon$  здесь от ориентации не зависит.

Теперь рассмотрим раздел 4. Для серии столов  $\Omega_k$  вид семьи зависел от  $k$ , и метка  $n$  была равна  $k$ . Ее модификация, серия  $\Omega_{k,k-s}$  строится из  $\Omega_k$  путем удаления  $0 \leq s \leq k$  пар листов  $a_{i1}, c_{i1} \dots, a_{is}, c_{is}$  из  $SW$ -комплекса и их символов из записи перестановок  $\sigma_j, \rho_j$ . При этом инвариант Фоменко–Цишанга (в том числе вид семьи из  $k - 1$  атома  $C_2$ ) не меняется, исключая метку  $n = k - s$  на этой семье.

В частности, на такой семье сложности  $2k - 2$  (количество критических окружностей в ее атомах) и валентности  $2k$  (количество граничных торов ее расслоения Зейферта) реализована любая метка  $|n| \leq k$ .

**У т в е р ж д е н и е 3.** На некоторой семье (заданной явно: она состоит из одного атома-вершины типа 3-атома  $C_2$ ) в классе бильярдных книжек реализуются все значения целочисленной метки  $n$ .

Теперь склеим бильярд  $\Omega'_k$  из  $k \geq 0$  экземпляров каждой из областей  $a = a_1$  и  $c = c_1$ , и двух экземпляров области  $b = b_1$  (занумеруем их верхним индексом). Перестановки  $\sigma$  и  $\rho$  на левой и правой ветвях гиперболы  $\lambda_1$  равны  $\sigma_1 = (a^1 a^2 \dots a^k b^1 b^2)$  и  $\rho_1 = (b^1 c^1 c^2 \dots c^k b^2)$ . При всех  $k$  инвариант Фоменко–Цишанга содержит одну и ту же семью из одного атома  $C_2$  с меткой  $n = k$ .

**С л е д с т в и е.** Сложность и валентность семьи, вообще говоря, не ограничивают метку  $n$ , реализуемую бильярдами на этой семье.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 19–01–00775-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глуцук А.А. // ДАН. 2018. Т. 481. № 6. С. 594–598.
2. Болотин С.В. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 2. С. 33–36.
3. Bialy M., Mironov A.E. // Adv. Math. 2017. V. 313. P. 102–126.
4. Bialy M., Mironov A.E. // J. Geom. Phys. 2017. V. 115. P. 150–156.
5. Avila A., Simoi J.De, Kaloshin V. // Ann. of Math. 2016. V. 184. № 2. P. 527–558.
6. Kaloshin V., Sorrentino A. // Ann. of Math. 2018. V. 188. № 1. P. 315–380.
7. Bialy M., Mironov A.E. // J. Phys. A. 2016. V. 49. № 45. 455101. 18 p.
8. Бялый М., Миронов А.Е. // УМН. 2019. Т. 74. В. 2 (446). С. 3–26.
9. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 17–56.
10. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. Т. 1. 444 с.
11. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. // Изв. РАН. Серия матем. 2019. Т. 83. № 6. С. 63–103.
12. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. С. 15–25.
13. Пустовойтов С.Е. // Фунд. прикл. мат. 2019. Т. 22. № 6. С. 201–225.
14. Fomenko A.T., Vedyushkina V.V. // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. С. 320–333.
15. Каргинова Е.Е. // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 1. С. 3–31.

# TOPOLOGICAL MODELING OF INTEGRABLE SYSTEMS BY BILLIARDS: REALIZATION OF NUMERICAL INVARIANTS

V. V. Vedyushkina<sup>a</sup>, V. A. Kibkalo<sup>a</sup>, and Academician of the RAS A. T. Fomenko<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Local version of A.T. Fomenko conjecture on modeling of integrable systems by billiards is formulated. It is proved that billiard systems realize arbitrary numerical marks of Fomenko–Zieschang invariants. Thus, numerical marks are not a priori a topological obstacle to realization of Liouville foliation of integrable systems by billiards.

*Keywords:* integrability, Hamiltonian system, billiard, Fomenko–Zieschang invariant,  $CW$ -complex