ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 5–8

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:52

СТАЦИОНАРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–ПУАССОНА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

© 2020 г. Ю. Батт[1,*], Э. Йорн[1,], А. Л. Скубачевский[2,3,***]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 04.06.2020 г.
Поступило 04.06.2020 г.
После доработки 04.06.2020 г.
Принято к публикации 15.06.2020 г.

Рассматривается трехмерная стационарная система уравнений Власова–Пуассона относительно функции распределения гравитирующего вещества $f = f_q(r,u)$, локальной плотности $\rho = \rho(r)$ и ньютоновского потенциала $U = U(r)$, где $r := |x|$, $u := |v|$ ($(x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ – координаты по пространству и скорости), а f представляется в виде функции q, зависящей от локальной энергии $E := U(r) + \frac{u^2}{2}$. Для заданной функции $p = p(r)$ мы получим достаточные условия ее "расширимости". Это означает, что существует стационарное сферически симметричное решение (f_q,ρ,U) системы Власова–Пуассона, зависящее от локальной энергии E такое, что $\rho = p$.

Ключевые слова: система Власова–Пуассона, стационарное сферически симметричное решение, звездная динамика

DOI: 10.31857/S2686954320040232

Трехмерная стационарная система Власова–Пуассона, возникающая в звездной динамике, имеет вид

$$(v,\nabla_x f) - (\nabla U,\nabla_v f) = 0, \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

$$\Delta U(x) = 4\pi\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v)dv, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Здесь $f = f(x,v) \geq 0$ – функция распределения гравитирующего вещества, $\rho = \rho(x) \geq 0$ – локальная плотность, $U = U(x) \leq 0$ – ньютоновский потенциал, $(x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ – координаты по пространству и скорости. Стационарное решение (f, ρ, U) системы Власова–Пуассона (1)–(3) называется сферически симметричным, если $(f, \rho, U)(x,v) = (f,\rho,U)(A_1x, A_2v)$ для всех ортогональных преобразований A_1 и A_2. Для стационарных сферически симметричных решений мы можем предполагать, что $(f,\rho,U)(x,v) = (f,\rho,U)(r,u)$, где $r := |x|$, $u := |v|$, библиографию см. в [1–3].

В этом сообщении мы получим достаточные условия "расширимости" для заданной функции $p = p(r)$. Это означает, что существует стационарное сферически симметричное решение (f,ρ,U) системы Власова–Пуассона с функцией f, зависящей от локальной энергии $E := U(r) + \frac{u^2}{2}$, такое, что $\rho = p$.

Известно, что для любого $\rho \in C^\sigma(\mathbb{R}^3)$, $0 < \sigma < 1$, такого, что $\operatorname{supp}\rho \subset B_R$, существует единственное решение $U \in C^{2+\sigma}(\mathbb{R}^3)$ уравнения (2), для которого $U(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, при этом

$$U(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)dy}{|x-y|}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

см. [4, 5], где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, $R > 0$ – некоторое число.

Рассмотрим ньютонов потенциал $U(x)$ в случае сферической симметрии. Предположим, что, вообще говоря, локальная плотность $\rho(x)$ может иметь сингулярность в точке 0.

[1] *Математический институт университета Мюнхена, Мюнхен, Германия*
[2] *Математический институт Российского университета дружбы народов, Москва, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
* *E-mail: batt@mathematik.uni-muenchen.de*
** *E-mail: ejoern@t-online.de*
*** *E-mail: skub@lector.ru*

Пусть $C_R(\mathbb{R}_+) = \left\{ p \in C(\mathbb{R}_+) \colon p(r) > 0,\ r \in (0, R),\ p(r) = 0,\ r \in [R, \infty),\ \int_0^r p(s)s^2 ds < \infty,\ r \in (0, \infty) \right\}$, где $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Определим оператор L на $C_R(\mathbb{R}_+)$ по формуле

$$(Lp)(r) = 4\pi\left(\frac{1}{r}\int_0^r p(s)s^2 ds + \int_r^\infty p(s)s ds\right), \quad r > 0. \quad (5)$$

Л е м м а 1. *Пусть* $p \in C_R(\mathbb{R}_+)$, *и пусть* $\rho \in C(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ — *сферически симметричная функция такая, что* $\rho(x) = p(|x|)$, $x \neq 0$. *Тогда функция* U, *заданная по формуле* (4), *является сферически симметричной и* $U(x) = -(Lp)(r)$, $x \neq 0$.

Обозначим $\mathcal{D}_R(L) = \{p \in C(\mathbb{R}_+) \colon p$ строго убывает на $(0, R)\}$.

Л е м м а 2. *Пусть* $p \in \mathcal{D}_R(L)$. *Тогда*

1) $Lp \in C^2(\mathbb{R}_+)$ *и*

$$(Lp)'(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r p(s)s^2 ds, \quad r > 0, \quad (6)$$

$$(Lp)''(r) = -\frac{2}{r}(Lp)'(r) - 4\pi p(r), \quad r > 0. \quad (7)$$

Если к тому же $p \in C_R(\overline{\mathbb{R}_+})$, *то* $Lp \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$;

2) *функция* Lp *строго убывает на* $\mathbb{R}_+$ *и имеет строго убывающую обратную функцию* $(Lp)^{-1}$: $[(Lp)(R), (Lp)(0)) \to (0, R]$, *где* $(Lp)(0) := \lim_{r \to 0}(Lp)(r)$.

Из лемм 1 и 2 следует, что если $p \in \mathcal{D}_R(L) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$, то существует единственное сферически симметричное решение $U(x) = -(Lp)(r) \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ уравнения (2) такое, что $U(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Часто мы будем использовать обозначение $P = Lp$.

О п р е д е л е н и е 1. Тройка функций $f = f(r, u)$, $\rho = \rho(r)$ и $U = U(r)$ называется с ф е р и ч е с к и с и м м е т р и ч н ы м E-з а в и с и м ы м р е ш е н и е м с и с т е м ы В л а с о в а–П у а с с о н а (1)–(3), если $\rho \in \mathcal{D}_R(L)$ и существует функция $q = q(s)$ такая, что

$$q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad q(s) = 0, \quad s \in (-\infty, 0], \qquad q(s) > 0, \quad s \in (0, P(0) - E_0), \quad (8)$$

$$f(r, u) = q(-E(r, u) - E_0) := f_q, \quad r, u \in \mathbb{R}_+, \quad (9)$$

$$U(r) = -L\rho(r), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (10)$$

$$\rho(r) = \int_{\mathbb{R}^3} f(r, |v|)dv, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (11)$$

где $E(r, u) = U(r) + \frac{u^2}{2}$, $E_0 = P(R) > 0$.

Заметим, что функция f вида (9) удовлетворяет уравнению (1) в следующем смысле: f является константой на характеристиках уравнения (1), поскольку E — первый интеграл уравнения (1).

В силу леммы 2 функция $(Lp)^{-1}$ строго убывает на $[E_0, P(0))$. Поэтому из условия $p \in \mathcal{D}_R(L)$ следует, что функция

$$F := p \circ (Lp)^{-1} \colon [E_0, P(0)) \to [0, p(0)) \quad (12)$$

строго возрастает и выполняется равенство

$$p(r) = F \circ Lp(r), \quad r \in (0, R]. \quad (13)$$

Пусть $F(h) = 0$, $h \in (0, E_0)$. Тогда уравнение (13) эквивалентно следующему уравнению

$$p(r) = F \circ Lp(r), \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (14)$$

Л е м м а 3. 1) *Пусть* (f_q, ρ, U) — *стационарное сферически симметричное* E-*зависимое решение системы* (1)–(3), *и пусть* $F := F_p$ *задано по формуле* (12), *где* $p = \rho$. *Тогда* q *удовлетворяет уравнению*

$$F(h) = 4\pi\sqrt{2}\int_0^{h - E_0} q(s)\sqrt{h - E_0 - s}\, ds, \qquad h \in [E_0, P(0)). \quad (15)$$

2) *Пусть* q *удовлетворяет условию* (8), *и пусть* $F(h)$ *задано по формуле* (15). *Предположим, что интегральное уравнение* (14) *имеет решение* $p \in \mathcal{D}_R(L)$. *Определим* $\rho := p$, $U(r) := -Lp(r)$ *и* $f_q(r, u) := q(-E(r, u) - E_0)$. *Тогда* (f_q, ρ, U) — *стационарное сферически симметричное* E-*зависимое решение системы* (1)–(3).

Пусть $F_0(h) := F(h + E_0)$, $h \in [0, P(0) - E_0)$. Тогда уравнение (15) примет вид

$$F_0(h) = 4\pi\sqrt{2}\int_0^h q(s)\sqrt{h - s}\, ds, \quad h \in [0, P(0) - E_0). \quad (16)$$

Уравнение

$$g(x) = \int_0^x f(s)\sqrt{x - s}\, ds \quad (17)$$

называется уравнением Эддингтона.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $p \in \mathcal{D}_R(L)$ называется р а с ш и р и м о й , если существует стационарное сферически симметричное E-зависимое решение (f, ρ, U) системы Власова–Пуассона (1)–(3) такое, что $\rho = p$.

Л е м м а 4 (лемма об эквивалентности). *Пусть* $p \in \mathcal{D}_R(L)$. *Тогда* p *расширима тогда и только тогда, когда уравнение Эддингтона* (16) *имеет реше-*

ние q, обладающее свойством (8), *для* $F := F_p$, *заданной по формуле* (12), *и* $F_0(h) := F(h + E_0)$.

В силу леммы 4 проблема расширимости может быть сведена к исследованию уравнения Эддингтона. Поэтому мы сформулируем дополнительное утверждение, касающееся разрешимости уравнения Эддингтона, которое эквивалентно результатам [6]. Пусть

$$L^1_{loc}[0,T) := \{p\colon [0,T) \to \mathbb{R};\ p|_{[0,a]} \in L^1[0,a] \ \text{для всех}\ a \in [0,T)\},$$

$$AC[0,T) := \{p\colon [0,T) \to \mathbb{R};\ p|_{[0,a]}\ \text{абсолютно непрерывно на}\ [0,a]\ \text{для всех}\ a \in [0,T)\}.$$

Л е м м а 5. 1) *Пусть* $g \in AC[0,T)$, $g(0) = 0$, *и пусть*

а) $H_{g'} \in AC[0,T)$, *где* $H_{g'}(x) := \int\limits_0^x \frac{g'(s)ds}{\sqrt{x-s}}$,

б) $H_{g'}(0) = 0$.

Тогда функция f, определенная по формуле

$$f(x) = \frac{2}{\pi} H_{g'}(x), \tag{18}$$

является единственным решением уравнения Эддингтона (17).

2) *Обратно, если* $f \in L^1_{loc}[0,T)$ *и* g *удовлетворяет* (17), *то* $g \in AC[0,T)$, $g(0) = 0$, *и выполняются соотношения* а) *и* б). *Кроме того, f представляется в виде* (18), *и* $g'(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{f(s)ds}{\sqrt{x-s}}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного сообщения.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $p \in \mathcal{D}_R(L)$, $p|_{(0,R]} \in C^2(0,R]$, F *задано по формуле* (12), $F_0(\cdot) = F(\cdot + E_0)$ *и* $E_0 = P(R)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Уравнение Эддингтона* (16) *имеет единственное вещественнозначное решение* $q \in L^1_{loc}[0, P(0) - E_0)$, *которое имеет вид*

$$q(h) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\frac{d}{dh}H_{F_0'}(h), \quad h \in [0, P(0) - E_0), \tag{19}$$

где

$$H_{F_0'}(h) = \int\limits_0^h \frac{F_0'(s)ds}{\sqrt{h-s}} \in AC[0, P(0) - E_0), \quad F_0 \in C^2[0, P(0) - E_0). \tag{20}$$

2. *p расширима тогда и только тогда, когда* $q(h) > 0$, $h \in (0, P(0) - E_0)$, *т.е.*

$$\frac{d}{dh}H_{F_0'}(h) = \frac{F_0'(0)}{\sqrt{h}} + \int\limits_0^h \frac{F_0''(s)ds}{\sqrt{h-s}} > 0, \quad h \in (0, P(0) - E_0), \tag{21}$$

где $F_0'(0) = \frac{p'(R)}{P'(R)} \geq 0$.

3. *Каждое из следующих условий является достаточным для расширимости p*:

а) $F_0''(s) > 0$, $s \in (0, P(0) - E_0)$,

б) $X(r) := p'(r)P''(r) - p''(r)P'(r) > 0$, $r \in (0,R)$,

в) $\frac{2}{r}p'(r) + p''(r) > 0$, $r \in (0,R)$,

где а) *и* б) *эквивалентны, а из условия* в) *следуют* а) *и* б).

Доказательство основано на леммах 1–5.

П р и м е р 1. Пусть $p(r) = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$, $0 \leq r \leq R$, и $p(r) = 0$, $r > R$, где $R > 0$. Подставляя $p(r)$ в (5), мы имеем $P\colon [0,R] \to [E_0, P(0)] = \left[\frac{8\pi R^2}{15}, \pi R^2\right]$ и $P(r) = \pi R^2\left[\frac{1}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1\right] := h$. Обратная функция P^{-1} имеет вид $r = P^{-1}(h) = R\sqrt{\frac{5}{3} - \sqrt{ah - \frac{20}{9}}}$, где $a = \frac{5}{\pi R^2}$. Следовательно, мы получим

$$F(h) = p \circ P^{-1}(h) = \sqrt{ah - \frac{20}{9}} - \frac{2}{3}, \quad h \in \left[\frac{8\pi R^2}{15}, \pi R^2\right],$$

$$F_0(h) = F(h + E_0) = \sqrt{ah + \frac{4}{9}} - \frac{2}{3}, \quad h \in \left[0, \frac{7\pi R^2}{15}\right].$$

Поэтому $F_0'(h) = \frac{a}{2\sqrt{ah + \frac{4}{9}}}$ и

$$H_{F_0'}(h) = \int\limits_0^h \frac{F_0'(s)ds}{\sqrt{h-s}} = \sqrt{a}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2}{3\sqrt{ah}}\right).$$

Дифференцируя последнее выражение, имеем

$$\frac{d}{dh}H_{F_0'}(h) = \frac{1}{3\left[h + \frac{4}{9a}\right]\sqrt{h}} > 0, \quad h \in \left(0, \frac{7\pi R^2}{15}\right).$$

В силу теоремы 1.2 функция p расширима. С другой стороны, можно показать, что достаточные условия теоремы 1.3.б) и 1.3.в) не выполнены.

Пример 2. Пусть

$$p(r) = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2, \quad 0 \le r \le R,$$
$$p(r) = 0, \quad r > R, \quad \text{где} \quad R > 0.$$

Подставляя $p(r)$ в (5), получим

$$X(r) = p'(r)P''(r) - p''(r)P'(r) = \frac{4\pi}{R} f(\alpha),$$
$$0 \le r \le R,$$

где

$$f(\alpha) = \left(\frac{2}{3} - 2\alpha + \frac{11\alpha^2}{5} - \frac{4\alpha^3}{5}\right), \quad \alpha = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \le 1.$$

Легко видеть, что $f(\alpha) > 0$ на [0, 1]. Следовательно, $X(r) > 0$ на $(0, R)$. Поэтому, в силу теоремы 1.3.б) функция p расширима. Однако достаточные условия теоремы 1.3.в) не выполняются.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batt J., Jörn E., Li Y.* Stationary Solutions of the Flat Vlasov—Poisson System // Arch. Rational Mech. Anal. 2019. V. 231. P. 189—232.
2. *Batt J., Faltenbacher W., Horst E.* Stationary Spherically Symmetric Models in Stellar Dynamics// Arch. Rational Mech. Anal. 1986. V. 93. P. 159—183.
3. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics. Princeton: Princeton University Press, 1987.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.С.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения. М.: Наука, 1964.
6. *Tonelli L.* Su un Problema di Abel // Mathematische Annal. 1928. V. 99. P. 183—199.

STATIONARY SPHERICALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF THE VLASOV–POISSON SYSTEM IN THE THREE–DIMENSIONAL CASE

J. Batt[a], E. Jörn[a], and A. L. Skubachevskii[b,c]

[a] *Mathematisches Institut der Universität München, München, Germany*
[b] *Mathematical Institute of the RUDN University, Moscow, Russian Federation*
[c] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academicain of the RAS V. V. Kozlov

We consider the three-dimensional stationary Vlasov—Poisson system of equations with respect to the distribution function of the gravitating matter $f = f_q(r,u)$, the local density $\rho = \rho(r)$, and the Newtonian potential $U = U(r)$, where $r := |x|$, $u := |v|$ $((x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ are the space–velocity coordinates), and f is a function q of the local energy $E := U(r) + \frac{u^2}{2}$. For a given function $p = p(r)$, we obtain sufficient conditions for p to be “extendable”. This means that there exists a stationary spherically symmetric solution (f_q, ρ, U) of the Vlasov—Poisson system depending on the local energy E such that $\rho = p$.

Keywords: Vlasov—Poisson system, stationary spherically symmetric solution, stellar dynamics