

РЕШЕНИЕ СЕРИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С 2-МЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ВЫПУКЛОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

© 2020 г. А. А. Ардентов^{1,*}, Л. В. Локуцкий^{2,**}, Ю. Л. Сачков^{1,3,***}

Представлено академиком РАН Р. В. Гамкрелидзе 10.06.2020 г.

Поступило 10.06.2020 г.

После доработки 10.06.2020 г.

Принято к публикации 13.07.2020 г.

Рассматривается ряд задач оптимального управления с двумерным управлением, принадлежащим произвольному выпуклому компактному Ω . Решение этих задач получено на основе методов выпуклой тригонометрии. Рассмотрены: (1) геодезические в финслеровой задаче на плоскости Лобачевского, (2) левоинвариантные субфинслеровы задачи на всех унимодулярных 3-мерных группах Ли (SU(2), SL(2), SE(2), SH(2)); (3) задача о качении шара по плоскости с функцией расстояния, заданной множеством Ω ; (4) серия “задач о яхтах”, обобщающих задачу Эйлера об эластике, задачу Маркова–Дубинса, задачу Ридса–Шеппа и новую субриманову задачу на SE(2).

Ключевые слова: субфинслерова геометрия, выпуклая тригонометрия, задача оптимального управления, плоскость Лобачевского, унимодулярные 3-мерные группы Ли, качение шара по плоскости, эластика Эйлера, задачи о яхтах

DOI: 10.31857/S2686954320050276

В работе [1] были введены обобщенные тригонометрические функции, для которых вместо круга используется произвольное компактное выпуклое множество на плоскости, содержащее начало координат внутри. Это обобщение названо выпуклой тригонометрией. В данной работе выпуклая тригонометрия применяется для явного интегрирования ряда нетривиальных задач оптимального управления с двумерным управлением.

1. ФИНСЛЕРОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрим задачу быстрогодействия на верхней полуплоскости $L^2 = \{(x, y), y > 0\}$:

$$\begin{aligned} T \rightarrow \inf; \quad \dot{x} &= y u_1; \quad \dot{y} = y u_2; \\ (u_1, u_2) &\in \Omega \subset \mathbb{R}^2; \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω — выпуклое компактное множество на плоскости, $0 \in \text{int } \Omega$ и заданы произвольные граничные условия на x и y . Решения этой задачи являются финслеровыми геодезическими на L^2 .

В этом разделе мы получим явные формулы для геодезических на L^2 в терминах выпуклой тригонометрии (случай симметричного множества Ω разобран в [2]). Согласно принципу максимума Понтрягина,

$$\mathcal{H} = p u_1 + q u_2.$$

Обозначим коэффициенты при управлениях через $h_1 = p u$ и $h_2 = q u$, здесь $p = \text{const}$. Тогда, так как

$$H = \max_{(u_1, u_2) \in \Omega} \mathcal{H} = s_\Omega(h_1, h_2) = \text{const} > 0,$$

то $(h_1, h_2) \in H \partial \Omega^\circ$. Делая замену с помощью функций выпуклой тригонометрии (см. [1])

$$\begin{aligned} h_1 &= H \cos_\Omega \theta; \quad h_2 = H \sin_\Omega \theta; \\ u_1 &= \cos_\Omega \theta; \quad u_2 = \sin_\Omega \theta; \quad \text{где } \theta \leftrightarrow \theta^\circ; \end{aligned} \quad (2)$$

¹ Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Вельское, Переславский район, Ярославская область, Россия

² Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

³ Научно-технологический университет “Сириус”, Сочи, Россия

* E-mail: aaa@pereslavl.ru

** E-mail: lion.lokut@gmail.com

*** E-mail: yusachkov@gmail.com

приходим к уравнению натуральной параметризации на геодезических

$$\dot{\theta}^\circ = \frac{h_1 \dot{h}_2 - h_2 \dot{h}_1}{H} = -\cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ. \quad (3)$$

Откуда, если $p \neq 0$, получаем $x = x_0 - \frac{H}{p} \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ$ и $y = \frac{H}{p} \cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ$, где $x_0 = \text{const}$. Итак, доказана

Теорема 1. Если $p \neq 0$, то экстремали в задаче (1) получаются поворотом Ω° на $(\text{sgn} p)90^\circ$, растяжением в $H/|p|$, сдвигом вдоль горизонтальной оси на x_0 и взятием части границы, лежащей в L^2 . Натуральная параметризация определяется уравнением (3).

Если $p = 0$, то управление меняется произвольно в верхнем ребре Ω (если $q = \text{const} > 0$), либо – в нижнем (если $q = \text{const} < 0$).

2. СУБФИНСЛЕРОВЫ ЗАДАЧИ НА 3-МЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

2.1. Постановка задачи

Пусть G есть 3-мерная унимодулярная группа Ли, и $L = T_{\text{Id}}G$ ее алгебра Ли, где Id – единичный элемент группы G . Возможны следующие случаи [3]: $L = \mathfrak{h}_3$ есть алгебра Гейзенберга, $L = \mathfrak{su}_2$ есть алгебра Ли группы унитарных матриц порядка 2, $L = \mathfrak{sl}_2$ есть алгебра Ли группы унимодулярных матриц порядка 2, $L = \mathfrak{se}_2$ ($L = \mathfrak{sh}_2$) есть алгебра Ли группы евклидовых (соответственно гиперболических) движений 2-мерной плоскости.

Пусть $\Delta \subset L$ есть 2-мерное подпространство, не являющееся подалгеброй Ли, и пусть $U \subset \Delta$ есть выпуклый компакт, такой что $0 \in \text{int}_\Delta U$. Рассматривается следующая левоинвариантная задача оптимального управления:

$$\dot{q} \in qU, \quad q \in G, \quad (4)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(T) = q_1, \quad (5)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (6)$$

В силу левоинвариантности задачи (4)–(6), можно положить $q_0 = \text{Id}$.

По теореме Аграчева–Барилари [4], существует базис $L = \text{span}(X_1, X_2, X_3)$, в котором

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{span}(X_1, X_2), \\ [X_1, X_2] &= X_3, \quad [X_3, X_1] = (\chi + \kappa)X_2, \\ [X_3, X_2] &= (\chi - \kappa)X_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\chi = \kappa = 0 \quad \text{или} \quad (\chi^2 + \kappa^2 = 1, \chi \geq 0).$$

Случай $\chi = \kappa = 0$ соответствует алгебре Гейзенберга $L = \mathfrak{h}_3$ [5, 8]. В случае $\chi^2 + \kappa^2 = 1$, $\chi \geq 0$ таблица умножения в алгебре Ли L сводится заменой переменных к следующей:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = aX_2, \quad [X_3, X_2] = bX_1, \quad (8)$$

$$a, b \in \{\pm 1, 0\}, \quad a + b \geq 0, \quad (a, b) \neq (0, 0), \quad (9)$$

где $a = \text{sgn}(\chi + \kappa)$, $b = \text{sgn}(\chi - \kappa)$.

Введем параметризацию $U = \{u_1 X_1 + u_2 X_2 \mid u = (u_1, u_2) \in \Omega\}$. Тогда задача (4)–(6) принимает форму

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \Omega, \quad (10)$$

$$q(0) = q_0 = \text{Id}, \quad q(T) = q_1, \quad (11)$$

$$T \rightarrow \min, \quad (12)$$

где левоинвариантные поля X_1, X_2 на группе Ли G удовлетворяют условиям (8), (9).

2.2. Принцип максимума Понтрягина

Оптимальное управление в задаче (10)–(12) существует по теоремам Рашевского–Чжоу и Филиппова [7]. Введем линейные на слоях кокасательного расслоения T^*G гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$, $q = \pi(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, где $\pi: T^*G \rightarrow G$ есть каноническая проекция. Согласно принципу максимума Понтрягина [6, 7], для оптимальных траектории $q(t)$ и управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, существует липшицева кривая $\lambda_t \in T_{q(t)}^*G$, $\lambda_t \neq 0$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющая условиям (здесь $h_i = \langle \lambda_t, X_i \rangle$):

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 = \max_{u \in \Omega} (w_1 h_1 + w_2 h_2) = s_\Omega(h_1, h_2) =: H, \quad (13)$$

$$\dot{h}_1 = -u_2 h_3,$$

$$\dot{h}_2 = u_1 h_3,$$

$$\dot{h}_3 = -a u_1 h_2 - b u_2 h_1,$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2,$$

$$H(\lambda_t) \equiv \text{const} \geq 0.$$

Аномальные траектории постоянны.

Рассмотрим нормальный случай $H > 0$. Вертикальная подсистема гамильтоновой системы (14) с помощью той же замены (2) сводится к системе

$$\dot{\theta}^\circ = \frac{h_3}{H}, \quad (15)$$

$$\dot{h}_3 = -H(a \cos_{\Omega} \theta \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ + b \sin_{\Omega} \theta \cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ).$$

Функция $\mathcal{C} = \frac{1}{2}(h_3^2 - bh_1^2 + ah_2^2)$ является функцией Казимира на коалгебре Ли L^* , поэтому $\mathbb{E} = \frac{\mathcal{C}}{H}$ есть первый интеграл системы (15). Разложим

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2H}h_3^2 + \mathcal{U}(\theta^\circ),$$

$$\mathcal{U}(\theta^\circ) = \frac{1}{2H}(ah_2^2 - bh_1^2) = \frac{H}{2}(a\sin_{\Omega^\circ}^2\theta^\circ - b\cos_{\Omega^\circ}^2\theta^\circ).$$

Система (15) является гамильтоновой системой с гамильтонианом $\mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^\circ &= \frac{h_3}{H}, \quad \theta^\circ \in \mathbb{R}/(2\mathbb{S}^\circ\mathbb{Z}), \\ \dot{h}_3 &\in -\mathcal{U}'(\theta^\circ), \quad h_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbb{S}^\circ$ — площадь Ω° . Для описания свойств регулярности экстремальной введем следующие множества:

$$\mathfrak{S}_k = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mid H \notin C^k(h_1, h_2)\}, \quad k = 1, 2.$$

Экстремаль $\lambda_t, t \in [\alpha, \beta], \alpha < \beta$, называется: релейной дугой, если $(h_1, h_2)(\lambda_t) \notin \mathfrak{S}_2$ для п.в. $t \in (\alpha, \beta)$; особой дугой, если $(h_1, h_2)(\lambda_t) \in \mathfrak{S}_2$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$; смешанной, если она есть конкатенация конечного числа релейных и особых дуг.

2.3. Релейные экстремали

Система (16) имеет неподвижные точки $(\theta^\circ, h_3) = (\theta_*^\circ, 0)$, в которых $\mathcal{U}'(\theta_*^\circ) \ni 0$.

Если $\mathcal{U}(\theta^\circ)$ имеет локальный минимум в θ_*° , убывает на интервале $(\theta_*^\circ - \varepsilon, \theta_*^\circ]$ и возрастает на интервале $[\theta_*^\circ, \theta_*^\circ + \varepsilon)$, то фазовый портрет системы (16) имеет неподвижную точку $(\theta^\circ, h_3) = (\theta_*^\circ, 0)$ типа центр.

Если $\mathcal{U}(\theta^\circ)$ имеет локальный максимум в θ_*° , возрастает на интервале $(\theta_*^\circ - \varepsilon, \theta_*^\circ]$ и убывает на интервале $[\theta_*^\circ, \theta_*^\circ + \varepsilon)$, то фазовый портрет системы (16) имеет подвижную точку $(\theta^\circ, h_3) = (\theta_*^\circ, 0)$ типа седло. Сепаратриса, входящая в неподвижную точку $(\theta_*^\circ, 0)$ в полосе $\theta^\circ \in (\theta_*^\circ - \varepsilon, \theta_*^\circ)$, попадает в эту точку за время, равное несобственному интегралу

$$I = H \int_{\theta_*^\circ - \varepsilon}^{\theta_*^\circ} \frac{d\theta^\circ}{\sqrt{2(\mathbb{E} - \mathcal{U}(\theta^\circ))}}.$$

Это время конечно или бесконечно в зависимости от того, сходится интеграл I или расходится. Аналогично для сепаратрисы в полосе $\theta^\circ \in (\theta_*^\circ, \theta_*^\circ + \varepsilon)$.

2.4. Особые экстремали

Кривая λ_t и управление $u(t)$ являются особыми тогда и только тогда, когда $\theta^\circ \equiv \text{const}$, $h_3 \equiv 0$,

$$a\sin_{\Omega^\circ}\theta^\circ \cos_{\Omega} \theta + b\cos_{\Omega^\circ}\theta^\circ \sin_{\Omega} \theta \equiv 0,$$

$$\cos_{\Omega^\circ}\theta^\circ \cos_{\Omega} \theta + \sin_{\Omega^\circ}\theta^\circ \sin_{\Omega} \theta \equiv 1,$$

$$(h_1(\lambda_t), h_2(\lambda_t)) \in \mathfrak{S}_2.$$

2.5. Смешанные экстремали

Смешанная экстремаль появляется, когда релейная дуга $(\theta^\circ(t), h_3(t))$ входит за конечное время в точку $(\theta_*^\circ, 0)$, соответствующую особой экстремали.

2.6. Частные случаи и примеры

Теорема 2. Если Ω есть выпуклый многоугольник, содержащий начало координат внутри себя, то все экстремали в задаче (10)–(12) релейные, особые или смешанные.

Теорема 3. Если Ω есть строго выпуклый компакт, содержащий начало координат внутри себя и $\partial\Omega^\circ$ является C^k -гладкой, $k \geq 2$, то все экстремали в задаче (10)–(12) релейные и C^k -гладкие.

Пример 1. $\Omega = \{\|u\|_\infty \leq 1\}$ или $\Omega = \{\|u\|_1 \leq 1\}$. В этих случаях все экстремальные траектории релейные, особые или смешанные.

Пример 2. $\Omega = \{\|u\|_p \leq 1\}, 1 < p < \infty$.

Теорема 4. Пусть $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_p \leq 1\}, p \in (1, +\infty)$. Если $1 < p < 2$, то все экстремали в задаче (10)–(12) релейные. Если $p > 2$, то возникают особые экстремали. Смешанные экстремали существуют тогда и только тогда, когда $(2 < p < \infty \text{ и } a = 1)$.

3. КАЧЕНИЕ ШАРА ПО ФИНСЛЕРОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим следующую задачу быстродействия:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min; \quad \dot{x} = u_1; \quad \dot{y} = u_2; \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}z(u_2\mathbf{i} - u_1\mathbf{j}); \quad u = (u_1, u_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — координаты центра шара, $z \in \mathbb{H}$ задает его поворот, Ω — выпуклое компактное множество на плоскости, $0 \in \text{int}\Omega$ и заданы произвольные граничные условия. Таким образом, зада-

ча (17) есть задача о поиске такого движения шара по плоскости без прокручивания и без проскальзывания, что точка касания (или, равносильно, центр) движется по кривой кратчайшей длины в финслеровой метрике на плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемой множеством Ω .

Обозначим через $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ сопряженные переменные к (x, y) и через $r \in \mathbb{H}$ — к z . Скалярное произведение z и r есть $\Re(z\bar{r})$. Согласно принципу максимума Понтрягина

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= pu_1 + qu_2 - \frac{1}{2}\Re(zj\bar{r})u_1 + \frac{1}{2}\Re(zi\bar{r})u_2 = \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\Re(zj\bar{r})\right)u_1 + \left(q + \frac{1}{2}\Re(zi\bar{r})\right)u_2.\end{aligned}$$

Явные формулы для решений могут быть получены в терминах выпуклой тригонометрии. Обозначим через h_1 и h_2 — коэффициенты при u_1 и u_2 . Очевидно, $\dot{p} = \dot{q} = 0$. Вертикальная подсистема гамильтоновых уравнений для $h_3 = -\frac{1}{2}\Re(zk\bar{r})$ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -h_3u_2; \quad \dot{h}_2 = h_3u_1; \\ \dot{h}_3 &= (q - h_2)u_1 + (h_1 - p)u_2.\end{aligned}\quad (18)$$

Она замыкается до полной системы уравнений принципом максимума $\mathcal{H} = h_1u_1 + h_2u_2 \rightarrow \max$ по $(u_1, u_2) \in \Omega$.

Сама вертикальная подсистема не зависит от формы множества Ω , но управления, максимизирующие $\mathcal{H}$, зависят принципиально. Тем не менее, как и в предыдущих задачах, при любом множестве Ω решения могут быть найдены с помощью функций выпуклой тригонометрии (см. [1]). Пусть $H = \max_{(u_1, u_2) \in \Omega} \mathcal{H}$. Если $H = 0$, то $(u_1, u_2) \parallel (p, q)$, и мы получаем, что аномальные экстремали есть прямые линии. Если $H > 0$, опять делая замену (2), находим первый интеграл вертикальной подсистемы (18):

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \frac{1}{2}H(\theta^{\circ 2} + \cos_{\Omega}^2\theta^{\circ} + \sin_{\Omega}^2\theta^{\circ}) - \\ &- p\cos_{\Omega}\theta^{\circ} - q\sin_{\Omega}\theta^{\circ} = \frac{1}{2H}h_3^2 + \mathcal{U}(\theta^{\circ}).\end{aligned}\quad (19)$$

Система на (θ°, h_3) опять является гамильтоновой с гамильтонианом $\mathbb{E}$:

$$\dot{\theta}^{\circ} = \frac{h_3}{H}; \quad \dot{h}_3 \in -\mathcal{U}'(\theta^{\circ}).$$

Теорема 5. Если Ω — эллипс с центром в начале координат, то вертикальная подсистема (18) для случая $H > 0$ интегрируется в эллиптических функциях.

Топологическая структура фазового портрета на плоскости $(\theta^{\circ}, \dot{\theta}^{\circ})$ зависит от констант p, q и $H > 0$ и может быть исследована явно, например, для случая многогранника получаем следующую теорему.

Теорема 6. Предположим, что Ω — выпуклый многоугольник. Тогда в задаче (17) есть два типа нормальных экстремалей:

1. Если управление u движется произвольно, не покидая некоторого ребра e в Ω , то соответствующая экстремаль оптимальна. В этом случае точка $\left(\frac{p}{H}, \frac{q}{H}\right)$ совпадает с вершиной Ω° , отвечающей ребру e .

2. В противном случае управление u кусочно-постоянно. Множество его значений конечно: управление $u = (\cos_{\Omega}\theta, \sin_{\Omega}\theta)$ есть либо вершина Ω , либо точка на некотором ребре e из Ω , заданная соотношением $(\cos_{\Omega}\hat{\theta}, \sin_{\Omega}\hat{\theta}) \parallel \left(\cos_{\Omega}\theta_0^{\circ} - \frac{p}{H}, \sin_{\Omega}\theta_0^{\circ} - \frac{q}{H}\right)$, где θ_0° задает вершину Ω° , отвечающую ребру e . Последний случай разрешен принципом максимума Понтрягина, если и только если $\mathbb{E} = H\mathcal{U}(\theta_0^{\circ})$.

4. ЯХТЫ

Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= u_1X_1 + u_2X_2, \quad X_1 = (\cos_{\Omega}\theta, \sin_{\Omega}\theta, 0), \\ X_2 &= (0, 0, 1), \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times (\mathbb{R}_{\theta}/(2\mathbb{S}\mathbb{Z})),\end{aligned}\quad (20)$$

где $\mathbb{S}$ — площадь множества Ω , также зафиксируем граничные условия, интегральный функционал качества в обобщенной форме и возможное ограничение на управление

$$\begin{aligned}q(0) &= q_0, \quad q(T) = q_1, \quad J = \int_0^T f(u_1, u_2)dt \rightarrow \min, \\ (u_1, u_2) &\in U \subset \mathbb{R}^2.\end{aligned}\quad (21)$$

Задача (20)–(21) включает в себя обобщения классических задач оптимального управления:

1) задача Эйлера об эластике [9] при условии $U = U_E = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 1\}$, $f = f_E = \frac{u_2^2}{2}$,

2) задача Маркова–Дубинса [10, 11] с $U = U_{MD} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 1, |u_2| \leq 1\}$, $f = 1$,

3) задача Ридса–Шеппа [12] с $U = U_{RS} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}, f = 1$,

4) субриманова задача на группе движений евклидовой плоскости SE(2) [13] с $U = \mathbb{R}^2, f = f_{SR} = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}$ или эквивалентно с $U = U_{SR} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}, f = 1$.

Классические задачи, когда Ω есть круг с центром в начале координат, описывают модели управления машиноподобным роботом, движущимся на горизонтальной плоскости. Обобщения этих моделей при произвольном Ω можно рассматривать как модели управления яхтой в море. Для моделей 1), 2) с $u_1 = 1$ область Ω задает описание вектора скорости в точке (x, y) в виде $(\cos_\Omega \theta, \sin_\Omega \theta)$. Явная форма Ω может быть получена из вида потоков ветра и воды, а решение достаточно описать в виде движения точки по границе множества Ω , параметризованной обобщенным углом θ . Для моделей 3), 4) следует предполагать, что Ω симметрично ($\Omega = -\Omega$), а яхта движется вперед и назад с одинаковой скоростью. Если $\Omega \neq -\Omega$ в задачах 3), 4), то физическая интерпретация ломается, однако математическая задача следует тому же решению, представленному ниже.

К общей задаче (20)–(21) был применен принцип максимума Понтрягина. Анормальный случай $\psi_0 = 0$ и нормальный случай при $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 0$ не рассматриваются в данной работе. Далее будем подразумевать $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$ без потери общности. Тогда функция Гамильтона записывается в следующей форме:

$$\mathcal{H} = \psi_0 f(u_1, u_2) + u_1 \cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta} + u_2 \psi_3,$$

где ψ_0, ψ_3 – компоненты вектора сопряженных переменных, $\tilde{\theta}$ есть перепараметризованный угол θ через оставшиеся компоненты ψ_1, ψ_2 , а множество $\tilde{\Omega}$ есть повернутое исходное множество Ω на соответствующий вектору (ψ_1, ψ_2) угол. При этом вертикальная подсистема принимает вид

$$\dot{\psi}_3 = u_1 \sin_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}. \quad (22)$$

Далее продолжим с каждой спецификацией для U и f согласно пунктам 1)–4).

4.1. Задача Эйлера об эластиках

Из условия максимума имеем $u_2 = \psi_3$. Максимизированный гамильтониан $H = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^2 + \cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}$ определяет фазовый портрет (22). Так как $\tilde{\Omega}$ компактно,

то существуют минимальное и максимальное значения $\cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}$, обозначим их через $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$, без ограничения общности полагаем далее $|m_1| \leq m_2$. Возможны следующие случаи:

1. $H = m_1$; прямые линии на (x, y) , соответствующие устойчивым положениям равновесия.

2. $H \in (m_1, m_2)$; инфлекссионные решения с периодичным θ и квазипериодичными x, y .

3. $H = m_2$; если $u_2 \equiv 0$, то имеем устойчивые и неустойчивые положения равновесия; при $\psi_3 \neq 0$ возникают две сепаратрисы, которые могут стремиться к положениям равновесия за конечное или бесконечное время в зависимости от степени гладкости $\tilde{\Omega}$.

4. $H \in (m_2, +\infty)$; неинфлекссионные решения с периодичным θ и квазипериодичными x, y .

4.2. Задача Маркова–Дубинса

В этом случае $H = \cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta} + |\psi_3|$, $u_2 = \text{sgn } \psi_3$ при $\psi_3 \neq 0$ ($u_2 \in [-1, 1]$ при $\psi_3 = 0$). Исследование возможных случаев приводит к следующему описанию экстремальных управлений.

Теорема 7. Если Ω строго выпукло, то при любом повернутом $\tilde{\Omega}$ имеем кусочно-постоянное экстремальное управление u_2 со значениями $u_2^1, u_2^2, \dots, u_2^n$ и соответствующими временными интервалами $T^1, T^2, \dots, T^n$ одного из двух типов:

1) $u_2^{2k} = 0, u_2^{2k+1} \in \{-1, 1\}; k \in \mathbb{N}, T^{2k}, k \in \mathbb{N}$ произвольны и $T^1 \leq 2S, T^n \leq 2S, T^{2k+1} = 2S$ при $k \neq 0, 2k+1 \neq n$.

2) $u_2^{2k} = \pm 1, u_2^{2k+1} = \mp 1, k \in \mathbb{N}; T^2 = T^3 = \dots = T^{n-1} = \hat{T} \leq 2S, T^1 \leq \hat{T}, T^n \leq \hat{T}$.

Теорема 8. Если Ω не строго выпукло, то помимо управления из теоремы 7 также возможно произвольное управление, соответствующее грани и порождающее смешанные траектории.

4.3. Задача Ридса–Шеппа

Условие максимума дает $H = |\cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}| + |\psi_3|$, $u_1 = \text{sgn} \cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}$, $u_2 = \text{sgn } \psi_3$, что определяет фазовый портрет системы (22) на цилиндре $(\tilde{\theta}, \psi_3)$. Возможны следующие случаи:

1. $H = 0$; прямые линии на (x, y) с условием $u_1 = \pm 1, u_2 = 0$.

2. $H \in (0, |m_1|)$; имеем два семейства, управление (u_1, u_2) для первого семейства переключается

по шаблону $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ с временными интервалами T^+, T^-, T^-, T^+ .

3. $H = |m_1|, m_2$; если $\tilde{\Omega}$ имеет слева (при $u_1 = -1$) или справа (при $u_1 = 1$) вертикальную сторону, то управление $u_2 \leq 1$ произвольно соответствует стороне, а в вершинах стороны возможно переключение на определенное управление $u_2 = \pm 1$ с дальнейшим движением угла $\tilde{\theta}$ вдоль границы $\tilde{\Omega}$ и переключением управления согласно формуле $u_1 = \operatorname{sgn} \cos_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}$ до попадания на ту же сторону при $|m_1| \neq m_2$ (либо на любую из двух при $|m_1| = m_2$).

4. $H \in (|m_1|, m_2)$, этот случай аналогичен случаю 3. Управление (u_1, u_2) переключается по повторяющемуся шаблону $(1, 1), (-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (1, -1)$ с определенными временными интервалами $T_1, T_2, T_3, T_3, T_2, T_1$.

5. $H \in (m_2, +\infty)$; $u_2 \equiv \pm 1$, u_1 переключается между 1 и -1 с интервалами $T_+, T_- = 2S - T_+$.

4.4. Субриманова задача на группе SE(2)

Из условия максимума имеем $u_1 = \cos_{\tilde{\Omega}}, u_2 = \psi_3$ с максимизированным гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(\cos_{\tilde{\Omega}}^2 \tilde{\theta} + \dot{\tilde{\theta}}^2)$, который определяет фазовый портрет системы (22). Возможны случаи:

1. $H \in (0, m_1^2)$; инфлекссионные решения с малой амплитудой для углового параметра θ .

2. $H = m_1^2, m_2^2$; если $\psi_3 = 0$, то имеем устойчивые и неустойчивые положения равновесия; когда $\psi_3 \neq 0$ возникают две малые сепаратрисы при $H = m_1^2$ (две большие при $H = m_2^2$).

3. $H \in (m_1^2, m_2^2)$; инфлекссионные решения с большой амплитудой для угла $\tilde{\theta}$.

4. $H \in (m_2^2, +\infty)$; неинфлекссионные траектории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе продемонстрирована эффективность подхода выпуклой тригонометрии к интегрированию ряда нетривиальных задач оптимального управления с двумерным управлением. Мы надеемся, что этот подход окажется плодотворным для многих других задач этого класса.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование Л.В. Локуциевского (разделы 1, 3) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20–11–20169) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Исследование Ю.Л. Сачкова (раздел 2) выполнено за счет

гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-31-51023) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук и в НТУ “Сириус”. Исследование А.А. Ардентова (раздел 4) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локуциевский Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 8. С. 120–148.
2. Грибанова И. А. Квазигиперболическая плоскость // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 288–301.
3. Jacobson N. Lie Algebras. / Interscience, 1962.
4. Agrachev A., Barilari D. Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // J. Dynamical and Control Systems. 2012. V. 18. P. 21–44.
5. Busemann H. The Isoperimetric Problem in the Minkowski Plane // American J. of Mathematics. 1947. V. 69. № 4 (Oct., 1947). P. 863–871.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
7. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
8. Берестовский В. Н. Геодезические не голономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметрики плоскости Минковского // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 1. С. 3–11.
9. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausanne: Bousquet, 1744.
10. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1889. Т. 1, 2. С. 250–276.
11. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American J. of Mathematics. 1957. V. 79. № 3. P. 497–516.
12. Reeds J.A., Shepp L.A. Optimal Paths for a Car That Goes Both Forwards and Backwards // Pacific J. Math. 1990. V. 145. № 2. P. 367–393.
13. Sachkov Yu.L. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2011. V. 17. № 2. P. 293–321.

EXPLICIT SOLUTIONS FOR A SERIES OF OPTIMIZATION PROBLEMS WITH 2-DIMENSIONAL CONTROL VIA CONVEX TRIGONOMETRY

A. A. Ardentov^a, L. V. Lokutsievskiy^b, and Yu. L. Sachkov^{a,c},

^a*The Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,
Veskovo village, Pereslavl district, Yaroslavl oblast, Russian Federation*

^b*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^c*Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

We consider a series of optimal control problems with 2-dimensional control lying in an arbitrary convex compact set Ω . We write solutions to these problems by using machinery of convex trigonometry. The paper includes (1) geodesics in the Finsler problem on the Lobachevsky hyperbolic plane; (2) left-invariant sub-Finsler geodesics on all unimodular 3D Lie groups (SU(2), SL(2), SE(2), SH(2)); (3) the problem of rolling ball on a plane with distance function given by Ω ; (4) a series of “yacht problems” generalizing Euler’s elastic problem, Markov–Dubins problem, Reeds–Shepp problem and a new sub-Riemannian problem on SE(2).

Keywords: sub-Finsler geometry, convex trigonometry, optimal control problem, Lobachevsky hyperbolic plane, unimodular 3D Lie group, rolling ball, Euler’s elastica, yacht problems