

УДК 519.62

## УКЛОНЕНИЕ ОБЪЕКТА С ПОРАЖАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ ОТ ЗОНЫ ВИДИМОСТИ НАБЛЮДАТЕЛЯ В $\mathbb{R}^3$

© 2020 г. Академик РАН В. И. Бердышев<sup>1,\*</sup>

Поступило 27.07.2020 г.

После доработки 27.07.2020 г.

Принято к публикации 20.08.2020 г.

В условиях наблюдения движется автономный объект, обладающий скоростным поражающим устройством, от которого наблюдатель, являющийся телесным, вынужден скрываться за выпуклые фрагменты окружающей местности. В работе характеризуются маршруты из заданного коридора движения, по которым объект может пройти скрытно от наблюдателя, подбирая скорость движения.

*Ключевые слова:* навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

**DOI:** 10.31857/S268695432005029X

1. В заданном коридоре  $Y \subset \mathbb{R}^3$  из точки  $t_*$  в точку  $t^*$  ( $t_*, t^* \in Y$ ) движется объект  $t$  со скоростным поражающим миниобъектом  $m$ , способным двигаться прямолинейно и равномерно. В  $\mathbb{R}^3$  имеется множество  $G$ ,  $G \cap Y = \emptyset$ , являющееся замыканием открытого множества, препятствующее видимости и движению. Наблюдатель  $f$ , недружественный по отношению к объекту  $t$ , опасаясь миниобъекта, располагается вблизи выпуклого фрагмента границы  $\partial G$  множества  $G$ , чтобы обеспечить возможность укрыться от  $m$ . Скорость  $v_m$  миниобъекта  $m$  существенно превосходит скорости  $v_f, v_t$  наблюдателя и объекта, при этом  $v_t > 0$ .

Предположим, что находясь в точке  $t_0 \in Y$ , объект обнаружил наблюдателя  $f \notin Y$ , демаскировавшего себя. Учитывая возможность немедленного запуска миниобъекта, наблюдатель выбирает фрагмент  $S \subset \partial G$  с базовой точкой  $s \in S$ , за которым он может укрыться, за время  $\tau_0 = R/v_m$ , где  $R = \|t_0 - s\|$ . Одновременно с перемещением от базовой точки  $s$  в укрытие наблюдатель продолжает по мере возможности следить за движением объекта  $t$ . В предлагаемой модели объект и миниобъект  $m$  изображаются точками, а наблюдатель — шаром  $V_\varepsilon(f)$  радиуса  $\varepsilon > 0$ , в центре  $f$  которого расположено средство наблюдения. Попадание

миниобъекта в шар  $V_\varepsilon(f)$  означает гибель наблюдателя.

Траектория объекта — это гладкая кривая  $\mathcal{T} \subset Y$  (маршрут) в совокупности со скоростным режимом  $v_t$  движения объекта по ней. Требуется выяснить возможности наблюдателя следить за объектом в безопасном для себя режиме, а объекта — уклониться от наблюдения на участке маршрута от момента прохождения объектом точки  $t_0$  до момента полного укрытия наблюдателя.

В данной работе характеризуются маршруты или их части, по которым возможен скрытый от наблюдения проход объекта. Подобная задача для  $\mathbb{R}^2$  решалась в [3]. Экстремальным задачам движения объекта в условиях слежения точечными наблюдателями посвящены работы [1, 2], см. также [4]. Модель с телесным наблюдателем ближе к реальности, но является более трудоемкой в связи с повышенной уязвимостью последнего.

2. Далее фрагмент  $S$  — связная открытая на  $\partial G$  поверхность, являющаяся выпуклой, в каждой ее точке существует опорная к  $S$  плоскость. Наблюдатель  $f$  выбирает фрагмент  $S$  и свое начальное положение  $f_0$  вблизи базовой точки  $s$  так, чтобы

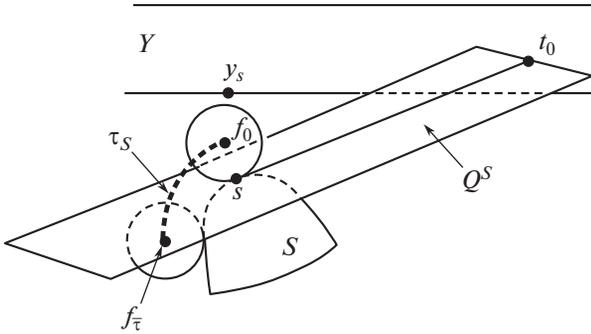
1) видеть возможно большую часть коридора  $Y$ ;

2) расстояние  $\rho(t_0, S)$  было достаточно большим для обеспечения наблюдателю возможности укрыться от миниобъекта, стартовавшего из точки  $t_0$ ;

3)  $\inf\{\|x - y\| : x \in S, y \in Y\} > \varepsilon$ ;

<sup>1</sup> Институт математики и механики  
им. Н.Н. Красовского Уральского отделения  
Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

\* E-mail: bvi@imm.uran.ru



**Рис. 1.** На рисунке изображен вариант I) расположения фрагмента  $S$ , коридор  $Y$  и плоскость  $Q^S$  изображены прямолинейными отрезками, траектория  $\mathcal{T}_S$  – жирной пунктирной линией.

4) существовал шар  $V_\varepsilon(\bar{f})$ , удовлетворяющий включению

$$V_\varepsilon(\bar{f}) \subset \text{co}(t_0, S) \setminus \text{conv}(t_0 \cup S),$$

где

$$\text{co}(t_0, S) = \{t_0 + \lambda(x - t_0) : x \in S, \lambda \geq 0\}$$

есть конус с вершиной  $t_0$ , натянутый на  $S$ , а  $\text{conv}(t_0 \cup S)$  – выпуклая оболочка объединения  $t_0 \cup S$ .

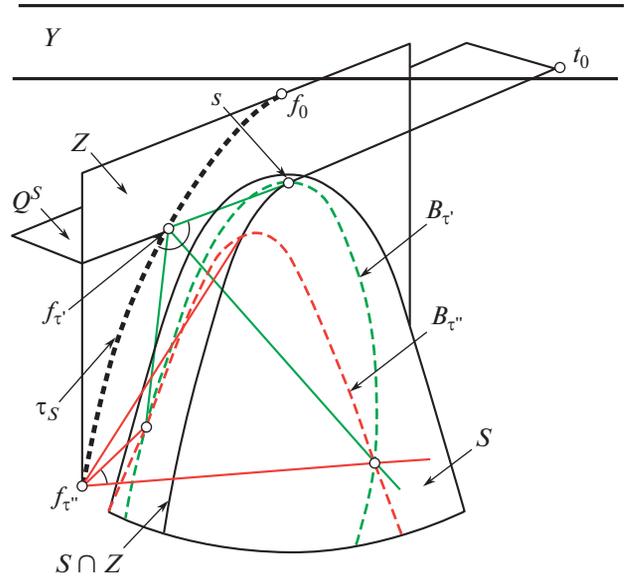
Представляют интерес следующие два варианта расположения фрагмента  $S$  относительно  $t_0$  и  $Y$ . В обоих вариантах предполагается существование плоскости  $Q = Q^S$ , содержащей точку  $t_0$  и опорной к фрагменту  $S$  во внутренней для  $S$  базовой точке  $s \in S \cap Q$ . Пусть  $y_s \in Y$  – ближайшая к  $s$  точка из  $Y$ . По условию выбора фрагмента  $S$  имеем  $\|s - y_s\| < \|s - t_0\|$ . Объект  $t$  движется по коридору  $Y$  от  $t_*$  через точку  $t_0$  в сторону точки  $y_s$  и далее к конечной точке  $t^*$ . В варианте (см. рис. 1)

I) фрагмент  $S$  и точка  $y_s$  расположены по разные стороны от  $Q$ ,

II) фрагмент  $S$  и точка  $y_s$  расположены по одну сторону от  $Q$ .

В обоих случаях начальное положение  $f_0$  наблюдателя таково, что шар  $V_\varepsilon(f_0)$  касается плоскости  $Q$  и поверхности  $S$  в точке  $s$ .

Траекторию движения центра шара  $V_\varepsilon(f_\tau)$  при переходе наблюдателя из положения  $V_\varepsilon(f_0)$  в положение  $V_\varepsilon(\bar{f})$  обозначим через  $\mathcal{T}_S$ . Естественно предположить, что траектория  $\mathcal{T}_S$  лежит в плоскости  $Z$ , натянутой на точки  $t_0, f_0, \bar{f}$  и  $\rho(f_\tau, S) = \varepsilon$  при  $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ . Через  $\tau_Q$  далее обозначаем значение временного параметра, при котором  $f_{\tau_Q} \in Q$ .



**Рис. 2.** На рисунке траектория  $\mathcal{T}_S$  наблюдателя  $f_\tau$  изображена жирным пунктиром, линии  $B_\tau$  и  $B_{\tau''}$  изображены пунктирными линиями, плоскости  $Q^S$  и  $Z$  – прямолинейными отрезками.

Предполагается, что наблюдатель из положения  $V_\varepsilon(f_0)$  перемещается в положение  $V_\varepsilon(f_{\tau_Q})$ , отслеживая движение объекта из точки  $t_*$  в точку  $t_0$ . В момент прохождения объекта через точку  $t_0$  и возможного запуска миниобъекта в направлении точки  $s \in S$  наблюдатель стартует из точки  $f_{\tau_Q}$  и за время  $\bar{\tau} - \tau_Q \leq \tau_0$  на максимальной скорости уходит по траектории  $\mathcal{T}_S$  в укрытие в точку  $f_\tau$ .

Пусть  $f_\tau \in \mathcal{T}_S$ ,  $K_\tau = \text{co}(f_\tau, S)$ ,  $B_\tau = S \cap \partial K_\tau$ . Ради простоты будем предполагать, что поверхность  $S$  является строго выпуклой, т.е.  $S$  не содержит прямолинейных отрезков. В этом случае множество  $B_\tau$  является линией (см. рис. 2).

Пусть луч  $l_\tau(b) = \{b + \lambda(b - f_\tau) : \lambda \geq 0\}$ ,  $b \in B_\tau$ , пересекается с  $Y$ ,  $\lambda_Y = \sup\{\lambda : b + \lambda(b - f_\tau) \in Y\}$ . Определим коническую поверхность:

$$k_\tau = \bigcup_b \{[b, b + \lambda_Y(b - f_\tau)] : l_\tau(b) \cap Y \neq \emptyset\}$$

и множество

$$\mathcal{H}_\tau = \text{conv}(k_\tau \cup S).$$

Справедливы

Лемма 1. Пусть  $\tau_Q \leq \tau' < \tau'' < \bar{\tau}$ , тогда  $\mathcal{H}_{\tau'} \subset \mathcal{H}_{\tau''}$ .

Лемма 2. отображения

$\tau \rightarrow K_\tau \cap V_\varepsilon(s)$ ,  $\tau \rightarrow \mathcal{H}_\tau$ ,  $\tau \rightarrow B_\tau$ ,  $\tau \rightarrow k_\tau$  являются непрерывными по Хаусдорфу.

**Замечание 1.** При отсутствии условия строгой выпуклости поверхности  $S$  отображение  $\tau \rightarrow B_\tau$  является полунепрерывным сверху.

3. Множество траекторий  $\mathcal{T} \subset Y$ , соединяющих точку  $t_0$  с поверхностью  $k_\tau$ , обозначим через  $\mathbb{T}$ . Они соответствуют промежутку времени  $[\tau_0, \bar{\tau}]$  движения наблюдателя от  $f_{\tau_0}$  до выхода из зоны видимости миниобъекта. Для  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$  возможны сегменты двух видов:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{T}} &= [\tau', \tau'']: k_\tau \cap \mathcal{T} \neq \emptyset \quad \forall \tau \in \Delta_{\mathcal{T}}, \\ \Delta &= (\tau', \tau''): k_\tau \cap \mathcal{T} = \emptyset \quad \forall \tau \in \Delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть каждый из них максимален по вложению.

Опишем тактику движения объекта  $t$  от  $\mathcal{T} \cap k_\tau$  до  $\mathcal{T} \cap k_{\tau'}$  на отрезке времени  $\Delta_{\mathcal{T}} = [\tau', \tau'']$ . Скорость движения объекта  $t$  определяется скоростью движения конической поверхности  $k_\tau$ , которая, в свою очередь, зависит от скорости движения наблюдателя  $f$  по траектории  $\mathcal{T}_S$ . При увеличении  $\tau$  поверхность  $k_\tau$  движется непрерывно от  $t_0$  в сторону точки  $y_s$ . Наблюдателю не видны точки из множества  $Y \cap \mathcal{H}_\tau$ , поэтому в момент времени  $\tau$  объект  $t$ , скрываясь от  $f$ , должен находиться во множестве  $\mathcal{T} \cap \mathcal{H}_\tau$ , в частности, принадлежать поверхности  $k_\tau$ .

Если для любого  $\tau \in \Delta_{\mathcal{T}}$  множество  $\mathcal{T} \cap \mathcal{H}_\tau$  одноточечно, то движение объекта по маршруту  $\mathcal{T} \cap \Delta_{\mathcal{T}}$  задается равенством  $t = t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau$ , т.е.  $t$  движется на временном промежутке  $\Delta_{\mathcal{T}}$ , не обгоняя  $k_\tau$ , будучи невидимым для  $f$ , и его скорость движения равна

$$\frac{dt}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\|t(\tau + \Delta\tau) - t(\tau)\|}{\Delta\tau}, \quad t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau. \quad (2)$$

Если для некоторого отрезка  $[\tau_1, \tau_2] \subset \Delta_{\mathcal{T}}$  множество  $\mathcal{T} \cap k_\tau$  ( $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ) не является одноточечным, но одноточечно для  $\tau_1 - \delta, \tau_2 + \delta$  при малых  $\delta > 0$ , то объект, двигаясь по части маршрута  $\mathcal{T}$ , заключенного между  $k_{\tau_1}$  и  $k_{\tau_2}$ , может лишь отстать от  $k_\tau$  ( $\tau \geq \tau_2$ ), оставаясь невидимым для  $f$  в силу леммы 1. Таким образом, указан способ выбора скоростного режима  $v(t)$  объекта  $t$  на отрезке времени  $\Delta_{\mathcal{T}}$ . На временном отрезке  $\Delta$  объект вынужден двигаться под наблюдением. Участок траектории  $\mathcal{T}$  между точками  $t, t'$  будем обозначать через  $[t, t']$ . Через  $Y^\circ$  обозначается внутренность коридора  $Y$ .

**Теорема 1.** Пусть выпуклая поверхность  $S \subset \partial G$ , расположенная в позиции I),  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ , тогда существуют  $\tau^*, \tau^{**}$  ( $\tau_0 < \tau^* \leq \tau^{**} < \bar{\tau}$ ) такие, что на участках траектории  $[t(\tau_0), t(\tau^*)]$ ,  $[t(\tau^{**}), t(\bar{\tau})]$  возможно скрытое от наблюдателя движение обь-

екта, в частности, движение  $t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau$  со скоростью  $dt/d\tau$ .

**Следствие.** Пусть  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ ,  $D = \{[\tau'; \tau''] \subset \subset [\tau_0, \bar{\tau}]\}$  – множество всех отрезков вида  $\Delta_{\mathcal{T}}$  (см. (1)), включающее отрезки  $[\tau_0, \tau^*], [\tau^{**}, \bar{\tau}]$ , тогда возможно скрытое от наблюдателя на отрезках из  $D$  движение обьекта, его скорость  $v_t$  на всей траектории  $\mathcal{T}$  удовлетворяет неравенству (см. (2))

$$v_t \geq \min \left\{ \frac{dt}{d\tau} : \tau \in \Delta_{\mathcal{T}} \in D \right\} > 0.$$

На оставшейся части отрезка  $[\tau_0, \bar{\tau}]$  движение обьекта происходит в условиях наблюдения.

**Теорема 2.** Если  $S$  – выпуклая поверхность в позиции I) и  $Y^\circ \cap k_\tau \neq \emptyset$  для всех  $\tau \in [\tau_0, \bar{\tau}]$ , то скрытый от наблюдателя проход обьекта  $t$  по маршруту  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$  возможен тогда и только тогда,

$$\text{когда } \mathcal{T} \subset Y \cap \left( \bigcup_{\tau_0}^{\bar{\tau}} k_\tau \right).$$

**Замечание 2.** Если пересечение  $\mathcal{T} \cap k_\tau$  одноточечно для любого  $\tau \in [\tau_0, \bar{\tau}]$ , то обьект может двигаться по правилу  $t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau$ . На участке многозначности пересечения  $\mathcal{T} \cap k_\tau$  скорость движения может быть максимальной.

**Теорема 3.** Пусть  $S$  – выпуклая поверхность, расположенная в позиции II). Для любого маршрута  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$  найдется точка  $\tilde{t} \in \mathcal{T}$ ,  $\tilde{t} \neq t_0$ ,  $\tilde{t} \notin k_\tau$  такая, что наблюдатель может отслеживать движение обьекта на участке маршрута от  $t_0$  до  $\tilde{t}$ , и только на нем.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердышев В.И., Костоусов В.Б. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: Из-во УрО РАН, 2007. 270 с.
2. Бердышев В.И., Костоусов В.Б., Попов А.А. Оптимальная траектория в  $\mathbb{R}^2$  в условиях наблюдения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 40–52.
3. Бердышев В.И. Задача безопасного слежения за обьектом, уклоняющимся от наблюдения в  $\mathbb{R}^2$  // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 82–85.
4. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.

## DEVIATION OF AN OBJECT WITH A STRIKING DEVICE FROM A VISIBILITY AREA OF AN OBSERVER IN $\mathbb{R}^3$

Academician of the RAS V. I. Berdyshev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Yekaterinburg, Russian Federation*

Under observation conditions, an autonomous object is moving, possessing a high-speed striking device, from which the observer, who is a corporal, is forced to hide himself behind convex fragments of the surrounding area. The paper describes the routes from a given movement corridor, along which an object could pass hidden from the observer by choosing the velocity of movement.

*Keywords:* moving object, solid observer, trajectory