ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 38–42

МАТЕМАТИКА

УДК 519.642.3

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СКАЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОСТАНОВКАХ НА СПЕКТРАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2020 г. А. А. Каширин[1,*], член-корреспондент РАН С. И. Смагин[1,]**

Поступило 10.03.2020 г.
После доработки 10.03.2020 г.
Принято к публикации 31.07.2020 г.

Рассмотрены граничные интегральные уравнения Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией, каждое из которых условно эквивалентно скалярной задаче дифракции (трансмиссии) на трехмерном однородном включении и решается численно. Предложена и апробирована модификация метода численного решения задачи дифракции на спектре интегрального оператора, где нарушаются условия корректной разрешимости интегрального уравнения и его эквивалентности исходной задаче.

Ключевые слова: дифракция, интегральное уравнение, спектр, численный метод

DOI: 10.31857/S2686954320050355

Рассматривается задача дифракции (трансмиссии) акустических волн на трехмерном однородном включении. Для нее получены и исследованы два слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией, каждое из которых условно эквивалентно исходной задаче. Методика и результаты численного решения этих уравнений при выполнении условий эквивалентности представлены в [1]. Вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый подход позволяет находить приближенные решения задачи дифракции с высокой точностью в широком диапазоне волновых чисел.

Упомянутые граничные интегральные уравнения обладают следующим свойством: у входящих в их состав интегральных операторов имеется спектр – счетное множество положительных волновых чисел, на котором нарушаются условия эквивалентности этих уравнений соответствующей задаче дифракции. В этом случае интегральные уравнения либо не имеют решений, либо разрешимы неединственным образом, в отличие от исходной задачи, которая всегда корректно разрешима. Для областей общего вида спектры операторов заранее неизвестны, а их поиск является весьма трудоемкой задачей. Отметим, что аналогичными свойствами обладают и некоторые другие интегральные формулировки задач дифракции [2].

Одним из путей расширения возможностей применяемой методики для решения задач дифракции на спектре интегральных операторов является модификация используемых интегральных представлений [3]. Получаемые при этом интегральные уравнения полностью эквивалентны исходной задаче, но имеют более сложную структуру и менее удобны для численного решения. Другие способы, связанные с модификацией метода численного решения рассматриваемых задач на спектре, обсуждаются, например, в статьях [4, 5].

Применяемый в данной работе подход основан на использовании исходных интегральных формулировок задач дифракции с близкими к точкам спектра волновыми числами, когда соответствующие интегральные уравнения заведомо корректно разрешимы. Ранее он применялся при численном решении трехмерных краевых задач для уравнения Гельмгольца в интегральных постановках [6].

1. ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство R^3 с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$, раз-

[1] *Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия*

**E-mail: elomer@mail.ru*

*** E-mail: smagin@ccfebras.ru*

деленное произвольной замкнутой поверхностью $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$, на внутреннюю и внешнюю области Ω_i и Ω_e ($\Omega_e = R^3 \backslash \bar{\Omega}_i$), заполненные однородными изотропными средами с плотностями $\rho_{i(e)}$, скоростями звука $c_{i(e)}$ и коэффициентами поглощения $\gamma_{i(e)}$.

Если в области Ω_e имеются гармонические источники звука, то возбуждаемые ими звуковые волны распространяются в ней и, достигая включения, заполняющего область Ω_i, рассеиваются на нем. В результате в области Ω_e возникают отраженные волны, а в области Ω_i появляются проходящие волны. Поэтому комплексную амплитуду полного волнового поля давлений u можно представить в виде

$$u = \begin{cases} u_i, & x \in \Omega_i, \\ u_e + u_0, & x \in \Omega_e, \end{cases}$$

где u_0, u_i, u_e – комплексные амплитуды поля давлений исходного, проходящего и отраженного волновых полей.

И с х о д н а я з а д а ч а. В областях Ω_i и Ω_e найти комплекснозначные функции u_i и u_e, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta u_{i(e)} + k_{i(e)}^2 u_{i(e)} = 0, \quad x \in \Omega_{i(e)}, \tag{1}$$

условиям сопряжения на границе Γ раздела сред из Ω_i и Ω_e

$$\begin{gathered} u_i^- - u_e^+ = u_0, \\ p_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\right)^- - p_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial n}\right)^+ = p_e \frac{\partial u_0}{\partial n}, \quad x \in \Gamma, \end{gathered} \tag{2}$$

и условию излучения для u_e на бесконечности

$$\frac{\partial u_e}{\partial |x|} - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь и далее знаками “–” и “+” отмечаются предельные значения соответствующих выражений на Γ, когда $x \to \Gamma$ из Ω_i и из Ω_e, $\mathbf{n}(x)$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности Γ в точке x, $k_{i(e)}$ – волновые числа,

$$\begin{gathered} k_{i(e)}^2 = \omega(\omega + i\gamma_{i(e)}) c_{i(e)}^{-2}, \\ \operatorname{Im}(k_{i(e)}) \geq 0, \quad p_{i(e)}^{-1} = \rho_{i(e)} c_{i(e)}^2 k_{i(e)}^2, \end{gathered}$$

ω – круговая частота колебаний.

И с х о д н а я з а д а ч а (о б о б щ е н н а я п о с т а н о в к а). Найти функции $u_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)}, \Delta)$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_{i(e)}} \nabla u_{i(e)} \nabla v_{i(e)}^* dx - k_{i(e)}^2 \int\limits_{\Omega_{i(e)}} u_{i(e)} v_{i(e)}^* dx = 0 \\ \forall v_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}), \end{gathered} \tag{4}$$

условиям сопряжения на границе Γ

$$\begin{gathered} \langle u_i^- - u_e^+, \mu \rangle_\Gamma = \langle f_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ \langle \eta, p_i N^- u_i - p_e N^+ u_e \rangle_\Gamma = \langle \eta, p_e f_1 \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma), \end{gathered} \tag{5}$$

и условию излучения на бесконечности (3) для u_e, если на границе Γ заданы функции $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Здесь v^* – комплексно-сопряженная к v функция, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ – отношение двойственности на $H^{1/2}(\Gamma) \times \times H^{-1/2}(\Gamma)$, обобщающее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$, $u^\pm \equiv \gamma^\pm u$, γ^-: $H^1(\Omega_i) \to H^{1/2}(\Gamma)$, γ^+: $H^1(\Omega_e) \to \to H^{1/2}(\Gamma)$ – операторы следов, N^-: $H^1(\Omega_i, \Delta) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, N^+: $H^1(\Omega_e, \Delta) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ – операторы нормальных производных [7], $f_0 = u_0^+$, $f_1 = N^+ u_0$.

З а м е ч а н и е. Если $\operatorname{Im}(k_e) = 0$, то $u_e \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_e, \Delta)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} (A_{i(e)} q)(x) \equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_\Gamma, \\ (B_{i(e)} q)(x) \equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_\Gamma, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} (B_{i(e)}^* q)(x) \equiv \langle N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_\Gamma, \\ G_{i(e)}(x, y) = \exp(ik_{i(e)}|x - y|) / (4\pi |x - y|). \end{gathered}$$

Решение задачи (3)–(5) будем искать в виде потенциалов

$$\begin{gathered} u_e(x) = (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \\ u_i(x) = (p_{ei} A_i (f_1 + N^+ u_e) - B_i^* (f_0 + u_e^+))(x), \quad x \in \Omega_i, \end{gathered} \tag{7}$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – неизвестная плотность, $p_{ei} = \dfrac{p_e}{p_i}$.

В этом случае данная задача условно эквивалентна слабо сингулярному граничному интегральному уравнению Фредгольма I рода [1]:

$$\langle Cq, \mu \rangle_\Gamma = \langle f_2, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} C = (0.5 + B_i^*) A_e + p_{ei} A_i (0.5 - B_e), \\ f_2 = -(0.5 + B_i^*) f_0 + p_{ei} A_i f_1. \end{gathered}$$

Исходная задача допускает еще одну условно эквивалентную формулировку в виде граничного интегрального уравнения Фредгольма I рода со слабой особенностью в ядре. Ее решение можно представить в виде

$$u_i(x) = (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \tag{9}$$

$$u_e(x) = (A_e (f_1 - p_{ie} N^- u_i) - B_e^* (f_0 - u_i^-))(x), \quad x \in \Omega_e,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ie} = p_i/p_e$. Тогда задача (3)–(5) сводится к интегральному уравнению

$$\langle Dq, \mu \rangle_\Gamma = \langle f_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{10}$$

$$D = (0.5 - B_e^*) A_i + p_{ie} A_e (0.5 + B_i).$$

Теорема 1 [1]. *Пусть* $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma), f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ *или* ω *не является собственной частотой задачи*

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad u^- = 0. \tag{11}$$

Тогда уравнения (8) *и* (10) *корректно разрешимы в классе плотностей* $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *и формулы* (7) *и* (9) *дают решение исходной задачи*.

Лемма. *Пусть* $\gamma_e = 0$ *и* ω — *собственная частота задачи* (11). *Тогда однородные уравнения* (8) *и* (10) *имеют нетривиальные решения* q_n', *связанные с собственными функциями* u_n *задачи* (11) *равенствами*

$$q_n' = N^- u_n, \quad n = 1, \ldots, m.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы,* $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma), f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$. *Тогда решение уравнения* (10) *существует и имеет вид* $q = q_i + q'$, *где* q_i — *его частное решение,*

$$q' = \sum_{n=1}^{m} a_n q_n',$$

a_n — *произвольные комплексные числа*, m — *кратность собственной частоты* ω. *Подстановка частного решения* q_i *в формулы* (9) *дает решение исходной задачи*.

Решение уравнения (8) *существует, если* $\langle f_2, q' \rangle_\Gamma = 0$. *Его можно представить в виде* $q = q_e + q'$, *где* q_e — *частное решение этого уравнения. Решение* q_e, *подставленное в формулы* (7), *дает решение исходной задачи*.

2. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СПЕКТРЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Основной целью данной работы является рассмотрение наиболее трудных с вычислительной точки зрения случаев, когда решение задачи дифракции ищется на собственных частотах задачи (11). Для численного решения интегральных уравнений используется согласованный с шагом сетки метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах, который не требует предварительной триангуляции поверхности включения. Он позволяет строить дискретные аналоги исходных задач по весьма простым аналитическим формулам. Его подробное изложение имеется, например, в публикациях [1, 6].

Опишем модификацию метода для численного решения интегральных уравнений на спектре. Обозначим через $k_e > 0$ некоторое собственное волновое число задачи (11), а через $q(k_e)$ — зависящее от него частное решение неоднородного уравнения (8) или (10). Выберем некоторое число $\delta > 0$. Тогда для искомого частного решения интегрального уравнения имеет место интерполяционная формула для плотности

$$\begin{aligned} q(k_e) = 4q(k_e + i\delta) - q(k_e - \delta + i\delta) - \\ - q(k_e + \delta + i\delta) - q(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4), \end{aligned} \tag{12}$$

где все плотности в правой части являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Подстановка найденной плотности в формулы (7) или (9) дает приближенное решение исходной задачи.

Формула (12) подразумевает, что искомое частное решение интегрального уравнения существует. В тех случаях, когда оно не существует, искомое приближенное решение задачи дифракции может быть найдено по аналогичной формуле для $u_{i(e)}$:

$$\begin{aligned} u_{i(e)}(k_e) = 4u_{i(e)}(k_e + i\delta) - u_{i(e)}(k_e - \delta + i\delta) - \\ - u_{i(e)}(k_e + \delta + i\delta) - u_{i(e)}(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4), \end{aligned} \tag{13}$$

где слагаемые в правой части — приближенные решения задач дифракции с соответствующими волновыми числами. Однако этот способ решения является несколько более трудоемким.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН”. Правильность и точность предлагаемого подхода проверялись для задач дифракции, имеющих известные точные решения.

Пример. Рассматривается задача дифракции плоской акустической волны на единичном шаре с центром в начале координат и тремя различными наборами параметров вмещающей среды и включения, где в качестве k_e выбраны собственные числа задачи (11). Комплексная амплитуда исходного волнового поля давлений имеет вид

$$u_0(x) = \exp(ik_e x_3), \quad f_0(x) = u_0^+, \quad f_1(x) = N^+ u_0,$$

параметры сред:

I) $k_i = 12.5$, $\rho_i = 4$, $k_e = 7.725251836937$, $\rho_e = 3$;

II) $k_i = 7$, $\rho_i = 2$, $k_e = 16.9236212852138$, $\rho_e = 5$;

III) $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.6980231532492$, $\rho_e = 4.5$.

Исследование уравнения (8) показало, что в этом случае оно не имеет решения. Поэтому применение формулы (12) в данном случае не дает правильного результата и необходимо использовать формулу (13). Существование частного решения уравнения (10) следует из теоремы 2. Оно может быть приближенно найдено при помощи формулы (12).

Задачи из примера решались дважды — с интерполяцией решения (формула (12), $\delta = 0.01$) и без нее. Количество точек дискретизации M варьировалось от 500 до 128000. Полученные в ре-

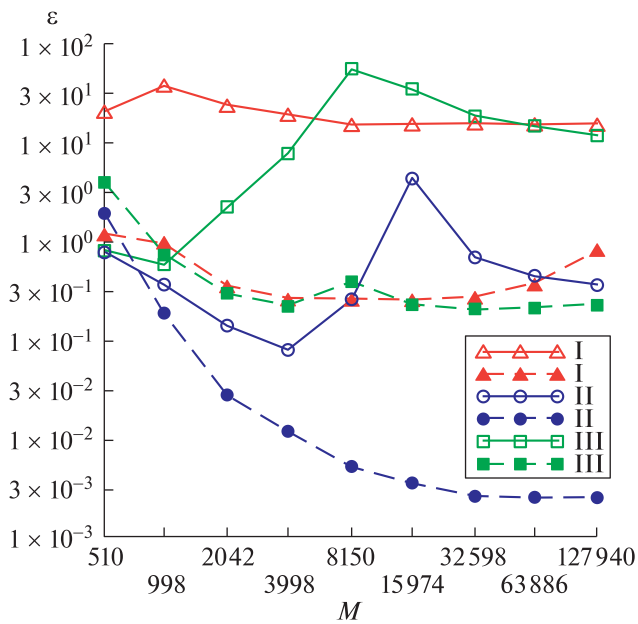

Рис. 1. Погрешности решений задачи дифракции из примера, найденных с использованием уравнения (8) без интерполяции решений.

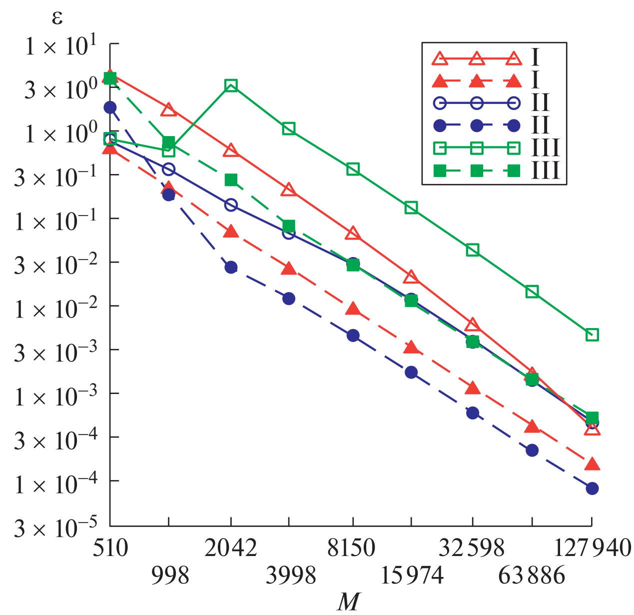

Рис. 2. Погрешности решений задачи дифракции из примера, найденных с использованием уравнения (8) с интерполяцией решений по формулам (13).

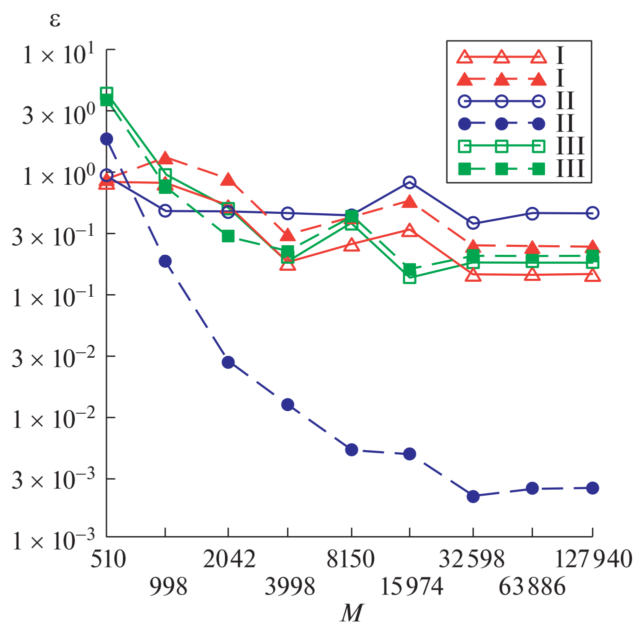

Рис. 3. Погрешности решений задачи дифракции из примера, найденных с использованием уравнения (10) без интерполяции решений.

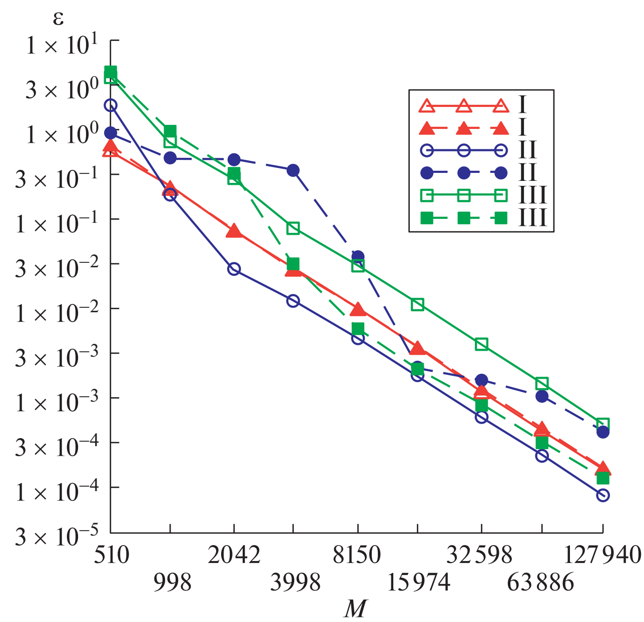

Рис. 4. Погрешности решений задачи дифракции из примера, найденных с использованием уравнения (10) с интерполяцией решений по формулам (12).

зультате дискретизации системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решались численно обобщенным методом минимальной невязки (GMRES) [8] с точностью 10^{-8}. Для нахождения приближенного решения второй и последующих вспомогательных задач в качестве первого приближения в GMRES использовалось приближенное решение первой вспомогательной задачи. Это позволяло получать их решения с точностью порядка δ уже на первой итерации.

На рис. 1 и 2 приведены погрешности решений задач дифракции, полученных путем решения уравнения (8). Погрешности вычислены в норме пространств сеточных функций $H_h^0(\Omega_{i(e)})$. Здесь и далее сплошной линией обозначены погрешности функций u_i, пунктиром – погрешности функций u_e. Результаты расчетов, относящиеся к первому, второму и третьему набору параметров, отмечены на графиках треугольниками, кругами и квадратами соответственно. Видно, что уравнение (8) не может быть использовано без интерполяции решения для нахождения приближенных решений задач дифракции, так как погрешности при увеличении размерностей СЛАУ не уменьшаются. При этом интерполяция по формуле (13) позволяет находить эти решения с погрешностями, которые при достаточно больших значениях M имеют порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$, где параметр h характеризует шаг сетки на границе включения.

Для приближенных решений задач дифракции, полученных с использованием уравнения (10) с интерполяцией решения по формуле (12), погрешности также имеют порядок $O(h^2)$ (рис. 4). Расчеты без интерполяции решения, представленные на рис. 3, в этом случае дают неудовлетворительные результаты, что согласуется с теоремой 2. Сравнение представленных результатов численных экспериментов показывает достаточно высокую эффективность применяемого подхода с интерполяцией решения.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20–01–00450) и Программы фундаментальных исследований ДВО РАН (проект 18-5-100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каширин А.А., Смагин С.И.* // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23. № 2. С. 20–36.
2. *Martin P.A.* // Wave Motion. 1991. V. 13. № 2. P. 185–192.
3. *Kleinman R.E., Martin P.A.* // SIAM J. Appl. Math. 1988. V. 48. № 2. P. 307–325.
4. *Mohsen A., Hesham M.* // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2006. V. 22. № 11. P. 1067–1076.
5. *Laliena A.R., Rapun M.-L., Sayas F.-J.* // Appl. Numer. Math. 2009. V. 59. № 11. P. 2814–2823.
6. *Каширин А.А., Смагин С.И.* // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
7. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 372 p.
8. *Saad Y., Schultz M.* // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1986. V. 7. № 3. P. 856–869.

ON NUMERICAL SOLVING OF THE SCALAR DIFFRACTION PROBLEMS IN INTEGRAL STATEMENTS ON THE INTEGRAL OPERATORS SPECTRA

A. A. Kashirin[a] and Corresponding Member of the RAS S. I. Smagin[a]

[a] *Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

The Fredholm boundary integral equations of the first kind with one unknown function are considered. Each one is conditionally equivalent to the scalar diffraction (transmission) problem on a three-dimensional homogeneous inclusion and is solved numerically. A modification of the numerical method for solving the diffraction problem on the spectrum of the integral operator is proposed and tested. In this case the conditions for the correct solvability of the integral equation and its equivalence to the original problem are violated.

Keywords: diffraction, integral equation, spectrum, numerical method