ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 97–104

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.924

О НЕКОТОРОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

© 2020 г. Член-корреспондент РАН А. В. Ильин[1,2,5,*], П. А. Крылов[2,], А. С. Фурсов[1,2,3,4,***]**

Поступило 08.07.2020 г.
После доработки 12.09.2020 г.
Принято к публикации 15.09.2020 г.

Предлагается подход, основанный на методе прогнозирующих моделей и методе сверхстабилизации, для решения задачи стабилизации параметрически неопределенных линейных нестационарных систем. При этом параметрическая неопределенность задается с помощью семейства компактных множеств в пространстве квадратных матриц. Данный подход строго обосновывается для систем второго порядка, но допускает обобщение для случая произвольного порядка.

Ключевые слова: теория стабилизации, стабилизация линейных нестационарных систем, управляемость

DOI: 10.31857/S2686954320050471

1. В в е д е н и е. Задача стабилизации нулевого положения равновесия управляемой линейной нестационарной системы вида

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами ($A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$) имеет более чем пятидесятилетнюю историю. Под задачей стабилизации здесь мы имеем в виду задачу стабилизации обратной связью по состоянию, т.е. нахождение регулятора вида $u = -k(t)x$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) - b(t)k(t))x.$$

Достаточно обширная библиография по этой проблеме представлена в монографиях [1, 2], которые, фактически, отражают современное состояние рассматриваемой задачи. В основе известных подходов к решению задачи о существовании стабилизирующих регуляторов для системы (1) лежат, по существу, две идеи: первая состоит в поиске так называемых коэффициентных условий стабилизируемости, вторая предполагает формулировку этих условий с использованием матрицы Коши соответствующей однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x. \qquad (2)$$

При этом каждая из указанных идей имеет свои сильные и слабые стороны.

Коэффициентные условия стабилизируемости позволяют, используя только лишь известные параметры системы (а именно, коэффициенты матрицы $A(t)$ и вектора $b(t)$), проверять существование стабилизирующего регулятора и получать конструктивные алгоритмы построения таких регуляторов. В свою очередь, коэффициентные условия можно подразделить на два типа: условия первого типа опираются на свойство дифференциальной управляемости системы, позволяющего приводить исходную систему к некоторой канонической форме, упрощающей нахождение стабилизирующего регулятора, условия второго типа не предполагают полной управляемости стабилизируемой системы, наиболее известные из них формулируются либо на основе методов квадратичной стабилизации и сводятся к задаче разрешимости матричных неравенств [3–5], либо на понятии сверхустойчивости, что также предполагает разрешимость систем линейных неравенств

[1] *Электротехнический университет г. Ханчжоу, Ханчжоу, Китай*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[4] *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва, Россия*
[5] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: iline@cs.msu.su*
***E-mail: pavel@leftsystem.ru*
****E-mail: fursov@cs.msu.ru*

[5, 6]. При этом стоит отметить, что коэффициентные условия первого типа предполагают достаточно жесткие условия на гладкость коэффициентов матриц $A(t)$ и $b(t)$, а выполнение условий второго типа, при всей их простоте, существенно зависит от выбора базиса в пространстве состояний и не является инвариантным относительно ляпуновских преобразований.

Существенно ослабить требования к коэффициентам системы позволяют условия стабилизируемости, опирающиеся на понятие матрицы Коши системы (2). При этом допускается, чтобы коэффициенты матриц $A(t)$ и $b(t)$ были всего лишь кусочно-непрерывными [1, 2, 7, 8]. Однако поскольку не существует общего метода построения матрицы Коши для произвольной нестационарной системы, то такие условия, как правило, неконструктивные.

Существенно более сложной является задача, когда коэффициенты системы (1) являются неопределенными функциями времени, т.е. когда известны не сами функции, а лишь множества их значений. В этом случае, фактически, система (1) представляет собой семейство нестационарных систем, матрицы которых принадлежат некоторому множеству неопределенности. Описания моделей множеств неопределенностей приведены, например, в работах [3, 9]. Вообще говоря, работ, посвященных исследованию задач стабилизации линейных систем с нестационарной неопределенностью значительно меньше, чем для аналогичных задач, в которых неопределенность не зависит от времени (обзор методов, используемых во втором случае, достаточно полно представлен в монографии [3]). Фактически, можно указать два основных подхода для стабилизации линейных систем с нестационарной неопределенностью – робастный подход и подход, основанный на базе нечеткой логики [10]. Сразу отметим, что сложность подхода, основанного на нечеткой логике, обусловлена слабой формализацией процедуры разработки баз правил и поэтому, зачастую, сильно зависит от квалификации и опыта конкретного исследователя. Робастный подход предоставляет достаточно четкие процедуры построения стабилизирующего регулятора (в большинстве случаев основанных на методе функций Ляпунова), но их применение осложняется либо вычислительными трудностями, либо серьезными ограничениями на тип неопределенности [9, 11–13]. Таким образом, задача разработки методов синтеза стабилизирующих регуляторов для линейных систем с нестационарными неопределенностями остается актуальной.

В настоящей работе для параметрически неопределенных систем (с нестационарной неопределенностью) предлагается один из возможных подходов к решению задачи стабилизации, основанный на методе прогнозирующих моделей [14] и методе сверхстабилизации [3, 6]. Указанный подход рассмотрен на примере линейных нестационарных систем второго порядка.

2. П о с т а н о в к а з а д а ч и. Итак, рассматривается управляемая линейная нестационарная система второго порядка

$$\dot{x} = A(t)x + bu, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход, $b \in \mathbb{R}^2$ – постоянный вектор-столбец. Про матрицу $A(t)$ известно, что ее коэффициенты являются непрерывными функциями на положительной полуоси и при любом $t \geq 0$ выполнено вложение $A(t) \in \Omega^t \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ для некоторого зависящего от времени t компакта Ω^t. Относительно компактов Ω^t предполагается выполненным следующее предположение: задана некоторая стремящаяся к бесконечности последовательность $\{t_i\}$, $t_0 = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$, такая, что для любого номера i известна опорная функция компакта Ω^{t_i} и непрерывная функция $r_i(t)$, характеризующая изменение компакта Ω^{t_i} во времени, а именно,

$$\Omega^{t_i + t'} \subset \mathrm{Conv}\Omega^{t_i} + S_{r_i(t')} \text{ для любого } t' \geq 0.$$

Здесь $S_{r_i(t')}$ – замкнутый шар радиуса $r_i(t')$ с центром в нуле (знаком “+” для двух компактов обозначена сумма Минковского). Приведенные условия фактически задают тип параметрической неопределенности для системы (3) и, таким образом, определяют бесконечное семейство линейных нестационарных систем с матрицами, удовлетворяющими указанным предположениям. Будем называть такое семейство параметрически неопределенной линейной нестационарной системой и представлять в следующей форме:

$$\dot{x} = A_{\Omega^t}(t)x + bu, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

При этом систему (3) будем называть допустимой реализацией параметрически неопределенной системы (4). Под множеством решений системы (4) будем понимать объединение множеств решений всех допустимых реализаций этой системы.

В настоящей работе рассматривается задача робастной стабилизации параметрически неопределенной системы (4).

Будем говорить, что параметрически неопределенная система (4), замкнутая регулятором в форме обратной связи $u = -k(t)x$, робастно устойчива, если любая ее допустимая реализация (3), замкнутая этим же регулятором, является асимптотически устойчивой.

Постановка задачи робастной стабилизации. Для параметрически неопределенной системы вида (4) требуется построить регулятор в форме линейной нестационарной обратной связи по состоянию $u = -k(t)x$, обеспечивающий робастную устойчивость соответствующей замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_{\Omega^t}(t) - bk(t))x, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

3. Сверхстабилизация прогнозирующей модели. Сформулированную задачу робастной стабилизации будем решать на основе метода управления с прогнозирующими моделями. Для этого на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0$, 1, ...) для системы (4) будем рассматривать соответствующую прогнозирующую модель в виде параметрически неопределенной системы

$$\dot{x} = \overline{A}_{\Lambda^{t_i}}(t)x + bu, \quad t \geq t_i, \tag{6}$$

для которой любая допустимая реализация

$$\dot{x} = \overline{A}(t)x + bu$$

удовлетворяет условию $\overline{A}(t) \in \Lambda^{t_i} = \mathrm{Conv}\Omega^{t_i}$ при всех $t \geq t_i$. Заметим, что опорные функции компактов Λ^{t_i} и Ω^{t_i} совпадают.

Далее, для каждого фиксированного $i \geq 0$ рассмотрим задачу робастной стабилизации прогнозирующей модели вида (6). Эту задачу будем решать на основе методов теории сверхустойчивости, но прежде введем ряд понятий и сформулируем вспомогательные утверждения.

Напомним, что линейная однородная нестационарная система второго порядка

$$\dot{x} = H(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

с матрицей $H(t) = (h_{ij}(t))$ называется сверхустойчивой [6] с показателем $\sigma > 0$, если для всех $t \geq 0$ выполнено условие

$$\min(-h_{11}(t) - |h_{12}(t)|, -h_{22}(t) - |h_{21}(t)|) \geq \sigma. \tag{7}$$

Известно [6], что любая сверхустойчивая система является асимптотически устойчивой и, кроме того, для любого решения сверхустойчивой системы с показателем σ выполняется оценка

$$\|x(t)\|_\infty \leq \|x(s)\|_\infty e^{-\sigma(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0.$$

Здесь $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Пусть Γ — некоторый компакт в $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что параметрически неопределенная система

$$\dot{x} = H_\Gamma(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

робастно сверхустойчива с показателем $\sigma > 0$, если любая ее допустимая реализация

$$\dot{x} = H(t)x, \quad H(t) \in \Gamma, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

является сверхустойчивой с тем же показателем σ.

Пусть $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ — базис пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^2$. Введем множества $Q_1 = \{q_1, q_2\}$ и $Q_2 = \{q_1, q_3\}$, где $q_1 = (1,1)$, $q_2 = (1,-1)$, $q_3 = (-1,1)$. Далее, определим на пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ линейные функционалы $f_i^q\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$)

$$f_i^q(H) = (e_i H, q),$$

где $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $q \in \mathbb{R}^2$, $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение векторов. Сформулируем теперь следующий критерий робастной сверхустойчивости.

Утверждение 1. *Параметрически неопределенная система* (8) *робастно сверхустойчива с показателем* $\sigma > 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\max_{i=1,2} \max_{q \in Q_i} \psi_\Gamma(f_i^q) \leq -\sigma,$$

где $\psi_\Gamma(f)$ — *опорная функция компакта* $\Gamma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

На самом деле оказывается, что с помощью утверждения 1 проверку робастной сверхустойчивости системы (8) можно свести к проверке сверхустойчивости обычной линейной стационарной системы. Действительно, введем в рассмотрение множества $P_i(\Gamma) = \{v = e_i H \mid H \in \Gamma\} \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$\psi_\Gamma(f_i^q) = \psi_{P_i(\Gamma)}(q), \tag{10}$$

где $\psi_{P_i(\Gamma)}(q)$ — опорная функция компакта $P_i(\Gamma)$ (здесь вектор q отождествляется с линейным функционалом $q(v) = (q, v)$). Теперь, учитывая (10) и утверждение 1, сформулируем конструктивный критерий проверки робастной сверхустойчивости параметрически неопределенной системы.

Теорема 1. *Параметрически неопределенная система* (8) *робастно сверхустойчива с показателем* $\sigma > 0$ *тогда и только тогда, когда с тем же показателем* σ *сверхустойчива система*

$$\dot{x} = \overline{H}x,$$

где

$$\overline{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_{P_1(\Gamma)}(q_1) + \psi_{P_1(\Gamma)}(q_2) & \psi_{P_1(\Gamma)}(q_1) - \psi_{P_1(\Gamma)}(q_2) \\ \psi_{P_2(\Gamma)}(q_1) - \psi_{P_2(\Gamma)}(q_3) & \psi_{P_2(\Gamma)}(q_1) + \psi_{P_2(\Gamma)}(q_3) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В качестве следствия теоремы 1 сформулируем необходимое и достаточное условие робастной сверхстабилизации управляемой параметрически неопределенной системы вида

$$\dot{x} = H_{\Gamma}(t)x + bu \tag{12}$$

с помощью линейной стационарной обратной связи.

Следствие 1. *Регулятор* $u = -kx$ *обеспечивает сверхустойчивость замкнутой параметрически неопределенной системы*

$$\dot{x} = (H_{\Gamma}(t) - bk)x$$

тогда и только тогда, когда сверхустойчива система

$$\dot{x} = (\bar{H} - bk)x,$$

где $\bar{H}$ *— матрица вида* (11).

Таким образом, в соответствии со следствием 1, задачу робастной сверхстабилизации параметрически неопределенной системы вида (12) можно свести к решению задачи сверхстабилизации линейной стационарной системы

$$\dot{x} = \bar{H}x + bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{H} = (h_{ij}). \tag{13}$$

В свою очередь, условие сверхстабилизации системы (13) можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 2. *Пусть величина*

$$\sigma^* = \frac{|b_2|(-h_{11} + \gamma_b(h_{12})) + |b_1|(-h_{22} + \gamma_b(h_{21}))}{|b_1| + |b_2|},$$

$$\gamma_b(x) = \begin{cases} x, & b_1b_2 > 0, \\ |x|, & b_1b_2 = 0, \\ -x, & b_1b_2 < 0 \end{cases}$$

строго положительна. Тогда найдется обратная связь $u = -k^*x$, *которая обеспечивает сверхустойчивость замкнутой системы*

$$\dot{x} = (\bar{H} - bk^*)x$$

с показателем $\sigma^* > 0$. *При этом вектор* k^* *может быть выбран так, что оказывается справедливой оценка*

$$\|\bar{H} - bk^*\|_1 \le C_b\|\bar{H}\|_1,$$

$$C_b = \begin{cases} \dfrac{3\|b\|_1}{\min(|b_1|, |b_2|)} + 1, & b_1b_2 \ne 0, \\ 2, & b_1b_2 = 0. \end{cases}$$

Здесь $\|b\|_1 = |b_1| + |b_2|$, $\|\bar{H}\|_1 = |h_{11}| + |h_{12}| + |h_{21}| + |h_{22}|$.

Коэффициенты обратной связи (вектор k^*) можно найти, записывая условие (7) для матрицы замкнутой системы $\bar{H} - bk^*$ и решая получившуюся линейную систему неравенств относительно k^*.

В соответствии с методом управления на основе прогнозирующих моделей, для фиксированного момента времени t_i, опираясь на теорему 1 и используя опорную функцию компакта Ω^{t_i}, построим для прогнозирующей модели (6) линейную стационарную систему

$$\dot{x} = \bar{A}_i^0 x + bu, \quad t \ge t_i \tag{14}$$

с матрицей $\bar{A}_i^0$ вида (11). Далее, на основании утверждения 2, найдем для системы (14) сверхстабилизирующую обратную связь

$$u = -k_i^* x \tag{15}$$

(в случае, если она существует), обеспечивающую сверхустойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = (\bar{A}_i^0 - bk_i^*)x \tag{16}$$

с показателем $\sigma_i^* > 0$. Тогда, в соответствии со следствием 1, этот регулятор будет обеспечивать робастную сверхустойчивость замкнутой прогнозирующей модели

$$\dot{x} = (\bar{A}_{\Lambda^{t_i}}(t) - bk_i^*)x. \tag{17}$$

4. Прогнозирование поведения исходной системы. Исследуем теперь вопрос об оценке поведения исходной системы (4) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ при замыкании ее регулятором (15), т.е. системы

$$\dot{x} = (A_{\Omega^t}(t) - bk_i^*)x. \tag{18}$$

Заметим, что поскольку $\Lambda^{t_i} = \mathrm{Conv}\Omega^{t_i}$, то для любой допустимой реализации

$$\dot{x} = (A(t) - bk_i^*)x \tag{19}$$

системы (18) найдется такая допустимая реализация

$$\dot{x} = (\bar{A}_i(t) - bk_i^*)x \tag{20}$$

системы (17), что верна оценка

$$\|A(t) - \bar{A}_i(t)\| \le r_i(t - t_i) \tag{21}$$

при $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Здесь $\|A\| = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Учитывая (21), сформулируем утверждение об оценке погрешности в поведении решений прогнозирующей модели.

Утверждение 3. *Пусть для некоторых допустимых реализаций* (19) *и* (20) *систем* (18) *и* (17), *соответственно, верна оценка* (21). *Тогда для любых двух решений* $x(t)$ *и* $\bar{x}(t)$ *систем* (19) *и* (20), *соответственно, с равными начальными условиями* $x(t_i) = \bar{x}(t_i)$, *для всех* $t \in [t_i, t_{i+1}]$ *выполняется неравенство*

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \le R_i(t - t_i)e^{L_i(t-t_i)+R_i(t-t_i)} \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]}\|\bar{x}(t)\|, \tag{22}$$

где $R_i(t) = \int\limits_0^t r_i(\tau)d\tau$, $L_i = \sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]}\|\overline{A}_i(t)\|$.

Теперь, опираясь на утверждения 2 и 3, сформулируем утверждение об оценке решений замкнутой системы (18) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Утверждение 4. *Пусть для прогнозирующей модели* (6) *существует регулятор* (15), *обеспечивающий сверхустойчивость соответствующей замкнутой системы* (17) *с показателем* $\sigma_i^* > 0$, *при этом* k_i^* *и* σ_i^* *удовлетворяют условию утверждения* 2. *Тогда для любого решения замкнутой системы* (18) *верна оценка*

$$\|x(t_{i+1})\|_\infty \le \|x(t_i)\|_\infty e^{p_i(t_{i+1}-t_i)},$$

где

$$p_i = \frac{\ln g(t_{i+1}-t_i)}{t_{i+1}-t_i},$$

$$g_i(t) = \sqrt{2}R_i(t)e^{C_bM_it+R_i(t)} + e^{-\sigma_i^*}t,$$

$$M_i = \max_{A\in\Lambda^{t_i}}\|A\|_1, \quad R_i(t) = \int\limits_0^t r_i(\tau)d\tau,$$

$$C_b = \begin{cases}\dfrac{3\|b\|_1}{\min(|b_1|,|b_2|)} + 1, & b_1b_2 \ne 0,\\ 2, & b_1b_2 = 0.\end{cases}$$

Здесь необходимо отдельно обсудить вопрос о вычислении константы M_i. Используя следующее представление для модуля действительного числа

$$|r| = \max(r,-r) = \max_{\theta\in\{-1,1\}}\theta r,$$

норму матрицы $\|A\|_1$ можно выразить так:

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j}\max_{\theta\in\{-1,1\}}\theta a_{ij} =$$
$$= \max_{\Theta\in\{-1,1\}^{2\times2}}\langle\Theta, A\rangle = \max_{\Theta\in\{-1,1\}^{2\times2}} f_\Theta(A),$$

где $\{-1,\ 1\}^{2\times2}$ – множество квадратных матриц второго порядка, элементами которых являются числа 1 или –1, f_Θ – линейный функционал, определяемый в соответствии с формулой $f_\Theta(A) = \langle\Theta, A\rangle$, здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{R}^{2\times2}$. Поэтому для M_i получаем

$$\begin{gathered}M_i = \max_{A\in\Lambda^{t_i}}\max_{\Theta\in\{-1,1\}^{2\times2}} f_\Theta(A) =\\ = \max_{\Theta\in\{-1,1\}^{2\times2}}\psi_{\Lambda^{t_i}}(f_\Theta)\max_{\Theta\in\{-1,1\}^{2\times2}}\psi_{\Omega^{t_i}}(f_\Theta).\end{gathered} \tag{23}$$

Учитывая, что опорная функция ψ для компакта Ω^{t_i} известна, формула (23) дает возможность вычислить значение M_i, выбирая максимальное значение этой опорной функции на конечном наборе функционалов f_Θ.

5. Алгоритм построения робастно стабилизирующей обратной связи. Теперь, используя результаты пп. 3, 4, для решения поставленной задачи стабилизации сформулируем конструктивный алгоритм построения регулятора, включающий следующие основные шаги:

1) выбор прогнозирующей модели для текущего промежутка времени $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots)$ в виде параметрически неопределенной системы (6);

2) построение по опорной функции компакта Ω^{t_i} такой линейной стационарной системы (14), что любой сверхстабилизирующий ее регулятор вида $u = -k_ix$ обеспечивает также робастную стабилизацию прогнозирующей модели (6);

3) поиск сверхстабилизирующего регулятора вида $u = -k_i^*x$ для системы (14); если такого регулятора не существует, то необходимо остановить алгоритм;

4) прогнозирование поведения системы (4) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ при замыкании ее регулятором $u = -k_i^*x$ и сравнение значений норм решений замкнутой системы (5) в точках t_i и t_{i+1}; если для какой-либо допустимой реализации системы (5) может выполняться неравенство $\|x(t_{i+1})\|_\infty \ge \|x(t_i)\|_\infty$, то необходимо остановить алгоритм;

5) возвращение к шагу 1) для момента времени t_{i+1}.

Шаг 2 предложенного алгоритма осуществляется с использованием теоремы 1, шаг 3 – на основе утверждения 2, шаг 4 – с помощью утверждения 4.

Заметим, что предложенный алгоритм позволяет строить стабилизирующий регулятор для системы (4) в виде нестационарной обратной связи $u = -k(t)x$ для любого сколь угодно большого временного промежутка $[0; t^*]$, $t^* \in \{t_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ниже будет сформулировано достаточное условие существования такого регулятора.

6. Достаточное условие работоспособности алгоритма робастной стабилизации. Теперь, учитывая доказанные выше утверждения, можно сформулировать основной результат о возможности реализации алгоритма поиска робастно стабилизирующего регулятора для параметрически неопределенной системы (4). Достаточные условия работоспособности приведенного в п. 5 настоящей работы алгоритма дает следующая

Теорема 2. *Пусть для любого* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *выполняется условие утверждения* 4 *и существует* *такое $p < 0$, что $p_i \le p$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда для любого решения $x(t)$ любой допустимой реализации*

$$\dot{x} = (A(t) - bk(t))x, \quad k(t) = k_i^* \quad \text{при} \quad t \in [t_i, t_{i+1})$$

замкнутой системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = (A_{\Omega^t}(t) - bk(t))x, \\ k(t) = k_i^* \quad \text{при} \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \end{gathered} \tag{24}$$

верно неравенство

$$\|x(t)\|_\infty \le 2\|x(t_0)\|_\infty e^{p(t_i - t_0)}$$

для любого $t \ge t_i \ge t_0$.

Очевидно, что при выполнении утверждения теоремы 2 обеспечивается асимптотическая устойчивость любой допустимой реализации системы (4), замкнутой линейной нестационарной обратной связью $u = -k(t)x$, где $k(t) = k_i^*$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$.

7. П р и м е р. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + bu, \quad t \ge 0, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(t) \in \Omega^t, \tag{25}$$

где семейство компактов Ω^t задано:

$$\Omega^t = C(t) + S_{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} \sin t - 1 & \cos t + 1 \\ \sin t + 1 & \cos t - 1 \end{pmatrix},$$

и представляет собой перемещающийся в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ шар, радиусом $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $C(t)$. Опорная функция данного компакта вычисляется следующим образом:

$$\psi_{\Omega^t}(f) = \psi_{C(t)}(f) + \psi_{S_{\frac{\sqrt{2}}{2}}}(f) = f(C(t)) + \frac{\sqrt{2}}{2}\|f\|.$$

В качестве последовательности моментов времени выберем $\{t_i\} = \left\{\dfrac{1}{20} i\right\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$, в качестве $r_i(t)$ возьмем $r_i(t) = t$. Нетрудно проверить, что действительно $\Omega^{t+t'} \in \Omega^t + S_{t'}\, \forall t,\, t' > 0$.

Рассмотрим i-ю итерацию алгоритма.

1) Для построения прогнозирующей модели необходимо зафиксировать компакт $\Lambda^{t_i} = \mathrm{Conv}\Omega^{t_i}$. В рассматриваемом случае $\Lambda^{t_i} = \Omega^{t_i}$.

2) Пользуясь теоремой 1, построим матрицу $\overline{A}_i^0$

$$\begin{gathered} \psi_{P_j(\Omega^{t_i})}(q) = f(P_j(C(t_i))) + \frac{\sqrt{2}}{2}\|q\| = \\ = f(P_j(C(t_i))) + 1, \quad j = 1, 2, \\ \psi_{P_1(\Omega^{t_i})}(q_1) = \sin t_i + \cos t_i + 1, \\ \psi_{P_1(\Omega^{t_i})}(q_2) = \sin t_i - \cos t_i - 1, \\ \psi_{P_2(\Omega^{t_i})}(q_1) = \sin t_i + \cos t_i + 1, \\ \psi_{P_2(\Omega^{t_i})}(q_3) = -\sin t_i + \cos t_i - 1, \end{gathered}$$

Используя формулу (11), получаем

$$\overline{A}_i^0 = \begin{pmatrix} \sin t_i & \cos t_i + 1 \\ \sin t_i + 1 & \cos t_i \end{pmatrix}.$$

3) Поиск регулятора начнем с вычисления σ_i^* в соответствии с утверждением 2:

$$\sigma_i^* = \frac{-\sin t_i + \cos t_i + 1 - \cos t_i + \sin t_i + 1}{2} = 1.$$

Далее, учитывая условие сверхустойчивости для матрицы $\overline{A}_i^0 - bk$ и найденное значение σ_i^*, вектор $k_i^* = (k_1, k_2)$ будем находить, решая неравенство

$$\begin{gathered} \min(-(\sin t_i - k_1) - |\cos t_i + 1 - k_2|, \\ -(\cos t_i - k_2) - |\sin t_i + 1 - k_1|) \ge 1 \end{gathered}$$

или равносильную ему систему

$$\begin{gathered} \sin t_i - k_1 + |\cos t_i + 1 - k_2| \le -1, \\ \cos t_i - k_2 + |\sin t_i + 1 - k_1| \le -1. \end{gathered}$$

В качестве решения системы можно выбрать

$$k_1 = \sin t_i + 1, \quad k_2 = \cos t_i + 1.$$

Матрица замкнутой системы в этом случае имеет следующий вид:

$$\overline{A}_i^0 - bk^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для найденного вектора k^* верна оценка из утверждения 2. Действительно

$$\|\overline{A}_i^0 - bk^*\|_1 = 2 \le 7(|\sin t_i| + |\sin t_i + 1|) \le 7\|\overline{A}_i^0\|_1.$$

4) Для того чтобы оценить норму вектора состояния $\|x(t_{i+1})\|_\infty$ исходной системы (25), замкнутой обратной связью $u = -k^*x$, воспользуемся утверждением 4. Вычислим необходимые величины

$$C_b = 7, \quad R_i(t) = \frac{t^2}{2}, \quad t_{i+1} - t_i = \frac{1}{20},$$

$$\begin{gathered} M_i = \max_{\Theta \in \{-1,1\}^{2\times 2}} \psi_{\Omega^{t_i}}(f_\Theta) = \\ = \max_{\Theta \in \{-1,1\}^{2\times 2}} \langle \Theta, C(t_i) \rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\|f_\Theta\| = 4 + \sqrt{2}, \end{gathered}$$

$$g_i(t_{i+1} - t_i) = \sqrt{2}\frac{1}{2 \cdot 20^2} e^{\frac{7(4+\sqrt{2})}{20} + \frac{1}{2 \cdot 20^2}} + e^{-\frac{1}{20}} \approx 0.963,$$

$$p_i = 20\ln 0.963 \approx -0.733 < 0.$$

Таким образом, получаем

$$\|x(t_{i+1})\|_\infty \le \|x(t_i)\|_\infty e^{p_i(t_{i+1}-t_i)} < \|x(t_i)\|_\infty.$$

Следовательно, для рассматриваемой системы алгоритм построения регулятора не остановится ни на каком шаге. В итоге получаем регулятор следующего вида:

$$u = -k(t)x, \quad k(t) = (\sin t_i + 1 \quad \cos t_i + 1), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{26}$$

Робастная устойчивость исходной параметрически неопределенной системы, замкнутой регулятором (26), следует из теоремы 2. Действительно, условия теоремы 2 выполняются при $p = -0.73$, следовательно для любого решения любой допустимой реализации замкнутой системы выполняется неравенство

$$\|x(t)\|_\infty \le 2\|x(t_0)\|_\infty e^{-0.73(t_i - t_0)},$$

из которого и следует робастная устойчивость указанной системы.

З а к л ю ч е н и е. Подводя краткий итог изложенных результатов, отметим, что в настоящей работе представлен конструктивный алгоритм пошагового построения робастно стабилизирующей обратной связи для параметрически неопределенной системы и достаточное условие его работоспособности для любого сколь угодно большого промежутка времени. Более того, учитывая полученные в утверждении 4 и теореме 2 оценки на нормы решений замкнутой системы (24), мы всегда можем оценить требуемый промежуток времени, на котором обеспечивается попадание рассматриваемого множества решений замкнутой системы в заданную окрестность нуля. Заметим, что рассчитанный по предложенному алгоритму стабилизатор обеспечивает грубость замкнутой неопределенной системы, что особенно актуально для нестационарных систем [15]. Также отметим, что изложенный подход к построению стабилизатора принципиально допускает обобщение (с незначительными изменениями теоретического характера) на неопределенные системы произвольного порядка n, при этом, естественно, увеличение порядка повлечет некоторое усложнение вычислительных процедур при практической реализации алгоритма.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 20–57–00001, 20–07–00827, 19–07–00294, 18–07–01283, 18-07-01105) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС, 2010.
2. *Макаров Е.К.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
4. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
5. *Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016.
6. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.
7. *Козлов А.А., Инц И.В.* О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 178–192.
8. *Зайцев В.А.* Равномерная полная управляемость и глобальное управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2015. Т. 25. Вып. 3. С. 318–337.
9. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными системами. М.: РУДН, 2008.
10. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний. 2013.
11. *Гелиг А.Х., Зубер И.Е.* Стабилизация некоторых классов неопределенных систем с помощью прямого и непрямого управления. I. Непрерывные системы // АиТ. 2012. Вып. 8. С. 76–90.
12. *Гелиг А.Х., Зубер И.Е., Захаренков М.С.* Новые классы стабилизируемых неопределенных систем // АиТ. 2016. Вып. 10. С. 93–108.
13. *Морозов М.В.* Алгоритмы анализа робастной устойчивости непрерывных систем управления с периодическими ограничениями // Пробл. управл. 2014. Вып. 2. С. 26–31.
14. *Richards A. G.* Robust constrained model predictive control. Massachusetts, 2005.
15. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1427–1439.

ABOUT SOME APPROACH TO THE STABILIZATION PROBLEM OF A PARAMETRICALLY UNCERTAIN LINEAR NON-STATIONARY SYSTEM

Corresponding Member of the RAS A. V. Ilin[a,b,e], P. A. Krylov[b], and A. S. Fursov[a,b,c,d]

[a] *Department of Mathematics, School of Science Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, P.R. China*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

[d] *Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russian Federation*

[e] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

An approach based on the method of predictive models and the method of super stabilization is proposed to solve the problem of stabilization of parametrically indefinite linear non-stationary systems. In this case, parametric uncertainty is specified using a family of compact sets in the space of square matrices. This approach is strictly justified for second-order systems, but can be generalized to the case of arbitrary order.

Keywords: stabilization theory, stabilization of linear non-stationary systems, controllability