ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 35–37

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.4

СХОДИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИСТИННОСТИ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕКУРСИВНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

© 2020 г. М. Е. Жуковский[1,2,3,*], Ю. А. Малышкин[1,4]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 29.06.2020 г.
Поступило 04.07.2020 г.
После доработки 04.07.2020 г.
Принято к публикации 12.09.2020 г.

Исследована справедливость закона нуля или единицы и закона сходимости для логики первого порядка двух рекурсивных моделей случайного графа – равномерной модели, в которой на каждом шаге добавляется вершина с m равномерно распределенными ребрами, и модели предпочтительного присоединения, в которой также проводятся m ребер, но вероятности не одинаковы, а пропорциональны степеням вершин, к которым эти ребра проводятся.

Ключевые слова: рекурсивные случайные графы, предпочтительное присоединение, логика первого порядка, законы нуля или единицы

DOI: 10.31857/S2686954320050483

Изучение предельного поведения вероятностей истинности предложений первого порядка для случайных графов было заложено в работе 1969 г. [1]. В этой работе (тот же результат был независимо доказан в 1976 г. в [2]) было доказано, что для любого предложения первого порядка [3, 4] на графах (т.е. сигнатура состоит из двух предикатных символов ~, =, обозначающих смежность вершин и равенство вершин соответственно) доля графов на множестве вершин $[n] := \{1,\ldots,n\}$, для которых это предложение истинно, стремится к 0 или 1 при $n \to \infty$. Другими словами, вероятность истинности предложения на биномиальном случайном графе $G(n,1/2)$ стремится либо к 0, либо к 1. Напомним, что биномиальный случайный граф $G(n,p)$ [5], в котором любая пара вершин из $[n]$ смежна с вероятностью p независимо от всех остальных, является наиболее изученной и наиболее востребованной с точки зрения приложений в комбинаторике моделью случайного графа.

Будем говорить, что (некоторый) случайный граф G_n на множестве вершин $[n]$ подчиняется закону нуля или единицы для логики $\mathcal{L}$, если для любого предложения из $\mathcal{L}$ вероятность истинности этого предложения на G_n стремится либо к 0, либо к 1 при $n \to \infty$.

Множество работ было посвящено обобщению упомянутого результата для других вероятностей проведения ребра p и более широких языков (см., например, [5, 6]). Заметим, что изучение логических законов для случайных графов имеет прозрачную мотивацию. Так, с точки зрения приложений, разумно изучать сложность проверки графовых свойств не только в худшем случае, но и в среднем (при этом распределение может быть подобрано в соответствии с требованиями, которые накладываются на модель случайного графа). Таким образом, если выполнен закон 0 или 1 для логики $\mathcal{L}$, то с точки зрения предложений из $\mathcal{L}$ случайный граф “устроен” тривиальным образом. Но так ли это в случае логики первого порядка и более “естественных” моделей случайного графа?

Наиболее известными моделями реальных сетей является семейство рекурсивных случайных графов, среди которых стоит выделить равномерную модель и модель предпочтительного присоединения, которым и посвящена данная работа (определение этих и других рекурсивных моделей, а также некоторую историю их исследования

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия*
[2] *Адыгейский государственный университет, Кавказский математический центр, Майкоп, Республика Адыгея, Россия*
[3] *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия*
[4] *Тверской государственный университет, Тверь, Россия*
**E-mail: zhukmax@gmail.com*

можно найти, например, в [5, 6]). Под рекурсивной последовательностью графов мы понимаем последовательность графов G_n, $n \in \mathbb{N}$, такую что граф G_{n+1} получается из графа G_n с помощью добавления одной вершины и проведения из нее нескольких ребер в уже имеющиеся вершины (при этом мы предполагаем, что две вершины могут соединяться только одним ребром), которые выбираются в соответствии с некоторым вероятностным распределением.

Параметром в обеих моделях будет служить натуральное число m, равное количеству ребер, добавляемых на каждом шаге. Определим сперва рекурсивный равномерный случайный граф $\mathcal{G}_{n,m}$, $n \in \{m, m+1, \ldots\}$. Пусть $\mathcal{G}_{m,m}$ — это полный граф на множестве вершин $[m]$. Случайный граф $\mathcal{G}_{n+1,m}$, $n \geq m$, получается из $\mathcal{G}_{n,m}$ добавлением вершины $n+1$ и m ребер, из нее исходящих и соединенных с m различными вершинами, выбранными равномерно из $[n]$. Частным случаем этой модели при $m = 1$ является случайное рекурсивное дерево [9]. Случайный граф предпочтительного присоединения (известный как случайный граф Боллобаша—Риордана) $\mathcal{H}_n$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$, определяется следующим образом: $\mathcal{H}_2$ — это граф на множестве вершин {1, 2} с одним ребром; $\mathcal{H}_{n+1}$ получается из $\mathcal{H}_n$ добавлением вершины $n+1$ и одного ребра, проведенного в вершину, вероятность выбора которой пропорциональна ее степени, т.е. $\mathrm{P}(n+1 \sim u$ в $\mathcal{H}_{n+1}) = \deg_{\mathcal{H}_n} u/(2n-2)$. Заметим, что в обобщенной модели Боллобаша—Риордана тоже присутствует параметр m. В рассматриваемом нами случае $m = 1$.

Одним из основных инструментов доказательства законов 0 или 1 для логики первого порядка является игра Эренфойхта (см., например, [5, 6]). Свести доказательство законов к упомянутой игре становится возможным благодаря следующему широко известному результату о связи между элементарной эквивалентностью и игрой.

Т е о р е м а 1 (А. Эренфойхт, 1960 [10]). *Пусть даны два графа H_1 и H_2 и некоторое натуральное число k. Тогда не существует предложения первого порядка кванторной глубиной k, различающего графы H_1 и H_2 (т.е. истинного на одном графе и ложного на другом), тогда и только тогда, когда Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре Эренфойхта на графах H_1 и H_2 в k раундах.*

Эта теорема имеет следствие, связывающее закон 0 или 1 и игру Эренфойхта (см., например, [5]): случайный граф G_n подчиняется закону 0 или 1 для логики первого порядка тогда и только тогда, когда для любого $r \in \mathbb{N}$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n, m \to \infty$, Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре Эренфойхта на графах G_n, G_m в r раундах.

Пусть T — дерево с корнем R, а v — сын R. Будем обозначать T_v поддерево дерева T с корнем v, содержащее всех наследников вершины v (т.е. вершины, которые соединены с v путем, не содержащим R). Пусть $r, a \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что дерево T обладает (r, a)-свойством, если для любого укорененного дерева F на не более a вершинах в дереве T найдется такая вершина R, что у нее есть хотя бы r сыновей $v_1, \ldots, v_r$, "отрезающих" от T деревья $T_{v_1}, \ldots, T_{v_r}$, изоморфные F (изоморфизм сохраняет корень).

В [11] доказан закон 0 или 1 для равномерного случайного дерева. В этой работе доказано, что для любого $r \in \mathbb{N}$ существует такое $a(r)$, что если два дерева обладают $(r, a(r))$-свойством, то Консерватор побеждает в игре Эренфойхта на этих двух деревьях в r раундах. Мы доказали, что для любого r с вероятностью, стремящейся к 1, $(r, a(r))$-свойство выполнено и для модели равномерного присоединения с $m = 1$, и для рассматриваемой модели предпочтительного присоединения, откуда незамедлительно следует закон 0 или 1.

Т е о р е м а 2. *Случайные графы $\mathcal{G}_{n,1}$ и $\mathcal{H}_n$ подчиняются закону 0 или 1 для логики первого порядка.*

Нам удалось доказать, что при $m \geq 2$ случайный граф $\mathcal{G}_{n,m}$ не подчиняется закону 0 или 1. Так, при $m = 2$ вероятность того, что случайный граф содержит хотя бы K (для некоторой константы K) копий даймонд-графа (графа на 4 вершинах с 5 ребрами), стремится к числу, отличному от 0 или 1. При $m > 2$ справедливо аналогичное утверждение, только вместо даймонд-графа надо рассмотреть полный граф на $m+1$ вершине.

Заметим, что для рассматриваемых предложений вероятность не сходится ни к 0, ни к 1, но у нее есть предел. В этой связи встает вопрос о сходимости. Будем говорить, что случайный граф G_n подчиняется закону сходимости для логики $\mathcal{L}$, если для любого предложения из $\mathcal{L}$ вероятность его истинности на G_n сходится к некоторому пределу при $n \to \infty$. Нам не удалось доказать закон сходимости для логики первого порядка для $\mathcal{G}_{n,m}$. Тем не менее, нам удалось доказать, что сходимость есть для предложений с не очень большой кванторной глубиной [4] (под кванторной глубиной, грубо говоря, подразумевается максимальное количество вложенных кванторов в формуле).

Т е о р е м а 3. *Случайный граф $\mathcal{G}_{n,m}$ подчиняется закону сходимости для предложений первого порядка, кванторная глубина которых не больше чем m.*

Этот результат тоже доказывается с помощью теоремы 1, а также с помощью следующей доказанной нами леммы о локальной структуре случайного графа $\mathcal{G}_{n,m}$.

Лемма 1. *Для любого* $a \in \mathbb{N}$ *найдутся* n_0, $N_0 \in \mathbb{N}$, *такие что с вероятностью, стремящейся к* 1 (*при* $n \to \infty$), *выполнены следующие условия*:

1. *Любой цикл с не более чем a вершинами либо полностью лежит в* $\mathcal{G}_{N_0,m}$, *либо находится на расстоянии, большем a, от* $\mathcal{G}_{n_0,m}$.

2. *Любой путь длины не более a, соединяющий две вершины из* $\mathcal{G}_{n_0,m}$, *лежит целиком в* $\mathcal{G}_{N_0,m}$.

3. *Любые два цикла на не более чем a вершинах, лежащие в* $\mathcal{G}_{n,m} \setminus \mathcal{G}_{n_0,m}$, *находятся на расстоянии большем a друг от друга.*

4. *Для любого* $b \le a$ *существуют как минимум m циклов длины b с вершинами в* $\mathcal{G}_{n,m} \setminus \mathcal{G}_{n_0,m}$.

5. *Степень любой вершины из* $\mathcal{G}_{N_0,m}$ *в графе* $\mathcal{G}_{n,m}$ *не меньше* $N_0 + m$.

От условия на ограниченность кванторной глубины можно отказаться, если ввести ограничение на максимальную степень случайного графа. А именно, рассмотрим следующую модель. Как и в равномерной модели на шаге $n + 1$ будем проводить m ребер в вершины, выбранные равномерно, но не из всего множества вершин $[n]$, а из тех вершин из $[n]$, степени которых меньше заданного параметра d. Поскольку на каждом шаге суммарная степень всех вершин увеличивается на $2m$, мы предполагаем, что $d > 2m$. Будем обозначать такой случайный граф $\mathcal{G}_{n,m,d}$. Итак, нами получен следующий результат.

Теорема 4. *Для любых* $m \ge 1$ *и* $d > 2m$ *случайный граф* $\mathcal{G}_{n,m,d}$ *подчиняется закону сходимости для логики первого порядка.*

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование М.Е. Жуковского выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание № 075-00337-20-03), номер проекта 0714-2020-0005. М.Е. Жуковским доказаны теорема 2, а также осуществлен вывод теоремы 3 из леммы 1. Исследование Ю.А. Малышкина выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19–31–60021. Ю.А. Малышкиным доказаны теорема 4 и лемма 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глебский Ю.В., Коган Д.И., Лиогонький М.И., Таланов В.А.* Объем и доля выполнимости формулузкого исчисления предикатов // Кибернетика. 1969. Т. 2. С. 17–26.
2. *Fagin R.* Probabilities on finite models // J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 50–58.
3. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления. 4-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2012. 240 с.
4. *Libkin L.* Elements of finite model theory. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Ser. B.; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. P. 318.
5. *Жуковский М.Е., Райгородский А.М.* Случайные графы: модели и предельные характеристики // УМН. 2015. Т. 70. № 1. С. 35–88.
6. *Spencer J.H.* The Strange Logic of Random Graphs. Springer Verlag, 2001. P. 168.
7. *Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G.* The Degree Sequence of a Scale-Free Random Graph Process // Random structures and algorithms. 2001. V. 18. № 3. P. 279–290.
8. *Hofstag R.* Random Graphs and Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. P. 321.
9. *Smythe R.T., Mahmoud H.M.* A survey of recursive trees // Theory Prob. Math. Statist. 1995. V. 51 P. 1–27.
10. *Ehrenfeucht A.* An application of games to the completeness problem for formalized theories // Warszawa. Fund. Math. 1960. V. 49. P. 121–149.
11. *McColm G.L.* MSO zero-one laws on random labelled acyclic graphs // Discrete Mathematics. 2002. V. 254. № 1–3. P. 331–347.

ON THE CONVERGENCE OF PROBABILITIES OF FIRST ORDER SENTENCES FOR RECURSIVE RANDOM GRAPH MODELS

M. E. Zhukovskii[a,b,c] and Y. A. Malyshkin[a,d]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National State University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*
[b] *Adyghe State University, Caucasus Mathematical Center, Maykop, Republic of Adygea, Russian Federation*
[c] *The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation*
[d] *Tver State University, Tver, Russian Federation*

In this paper, we study first order zero-one law and first order convergence law for two recursive random graph models — uniform and preferential attachment models. In the uniform attachment model, at every moment a new vertex with m edges chosen uniformly is added, while, in the preferential attachment model, the distribution of second ends of these edges is not uniform — the probabilities are proportional to degrees of the respective vertices.

Keywords: recursive random graphs, preferential attachment, first order logic, zero-one laws