

УДК 517.953

## ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛОКАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО ИСТОЧНИКА АНТРОПОГЕННОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ

© 2021 г. М. А. Давыдова<sup>1,\*</sup>, член-корреспондент РАН Н. Ф. Еланский<sup>2,\*\*</sup>,  
С. А. Захарова<sup>1,\*\*\*</sup>, О. В. Постыляков<sup>2,\*\*\*\*</sup>

Поступило 16.11.2020 г.  
После доработки 16.11.2020 г.  
Принято к публикации 14.12.2020 г.

Рассматривается применение численно-асимптотического подхода к решению некоторых коэффициентных обратных задач диффузии примесей в атмосфере. Асимптотическое решение прямой задачи для эффективного прогностического уравнения в ближней зоне источника, полученное в результате строгого асимптотического анализа многомерной сингулярно возмущенной задачи реакция–диффузия–адвекция, используется в качестве априорной информации при построении численного алгоритма решения обратной задачи по восстановлению параметров источника антропогенного загрязнения. Реализация алгоритма основана на использовании данных зондирования состава атмосферы Земли с российского спутника Ресурс-П, полученных с рекордно высоким пространственным разрешением. Впервые с использованием высокоточного космического мониторинга и математических методов получена оценка выбросов загрязняющей атмосферу примеси (диоксида азота) изолированным промышленным предприятием.

*Ключевые слова:* сингулярно возмущенные модели реакция–диффузия–адвекция, асимптотические методы, коэффициентные обратные задачи, оценка эмиссий загрязняющих примесей, высокоточная спутниковая съемка тропосферного NO<sub>2</sub>

DOI: 10.31857/S2686954321010021

В последнее время активно развивается новое направление в теории сингулярных возмущений, связанное с дальнейшим развитием и использованием методов асимптотического анализа [1, 2] при численном решении прямых [3] и обратных [4, 5] задач для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия–адвекция. Среди приложений нового численно-асимптотического подхода можно выделить прямые и обратные задачи нелинейного теплообмена [6], задачи распространения нелинейных акустических волн [5] и др. Основу численно-асимптотического подхода составляет использование информации о свойствах решений прямых задач, полученной в результате строгого асимптотиче-

ского анализа, с целью разработки метода генерации динамически адаптированных сеток для эффективных численных алгоритмов решения прямых задач или с целью восстановления параметров модели при решении обратных задач. В результате применения данного подхода удастся свести исходную задачу к задаче с более простым численным решением и значительно сэкономить вычислительные ресурсы, сократить время счета, повысив стабильность работы вычислительного процесса по сравнению с альтернативными подходами.

В сообщении рассматривается применение численно-асимптотического подхода к решению некоторых коэффициентных обратных задач атмосферной диффузии примесей, связанных с восстановлением параметров стационарных источников антропогенного загрязнения, а также оценивание эмиссий загрязняющих веществ на основе разработанного метода. В отличие от традиционного описания миграций активных примесей в атмосферном пограничном слое (см., например, [7–9]), в настоящей работе изменение средней концентрации активной примеси в шлейфе источника антропогенного загрязнения описывается эффективным уравнением реакция–диффузия–

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт физики атмосферы имени А.М. Обухова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: m.davydova@physics.msu.ru

\*\*E-mail: n.f.elansky@mail.ru

\*\*\*E-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

\*\*\*\*E-mail: oleg.postylyakov@gmail.com

адвекция, в котором цепь химических превращений примеси параметризуется путем введения эффективной скорости распада. Это позволяет свести нелинейную задачу о миграции активных примесей в шлейфе локального источника к серии линейных задач относительно эффективных прогностических уравнений. С использованием асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи для эффективного прогностического уравнения в ближней зоне источника (решение прямой задачи) реализуется эффективный численный алгоритм решения обратной задачи по восстановлению параметров источника на конечнопараметрическом множестве [10]. При этом используются данные наблюдений распределения примеси в финальный момент времени, полученные с помощью высокоточной космической съемки шлейфа загрязненного воздуха от источника [11]. На основе этого подхода разрабатывается новый эффективный метод оценки мощности выброса примесей локальными источниками, точность которого определяется точностью модельного описания.

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ**

Рассмотрим стационарную модель реакция–диффузия–адвекция:

$$\varepsilon^2 \nabla(k(x) \nabla u) - \varepsilon(\mathbf{A}(x), \nabla u) + f(u, x) = 0, \quad (1)$$

$$x \in G \subset R^2,$$

$$-\varepsilon k(x)(\nabla u, \mathbf{n}) = g(x), \quad x \in S, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ , вырожденное уравнение  $f(u, x) = 0$  имеет изолированное решение  $u = \varphi(x)$  такое, что  $f_u(\varphi(x), x) < 0$ , функции  $k(x) > 0$ ,  $\mathbf{A}(x) := \{A_1(x), A_2(x)\}$ ,  $f(u, x)$ ,  $x \in G \cup S$  и граница  $S$  – достаточно гладкие,  $\mathbf{n}$  – единичная внутренняя нормаль к  $S$ . На границе  $S$  задан малый поток:  $g(x) := \varepsilon \bar{g}(x)$ . Степень гладкости функций и границы определяется порядком строящейся асимптотики.

Асимптотическое разложение по параметру  $\varepsilon$  решения задачи (1), (2) определяется в соответствии с алгоритмом А.Б. Васильевой [1]:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \theta, \varepsilon), \quad (3)$$

где  $\bar{u}(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$  – регулярная часть асимптотики,  $\Pi u(\rho, \theta, \varepsilon) = \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \theta) + \varepsilon^2 \Pi_2 u(\rho, \theta) + \dots$  – погранслоная часть асимптотики,  $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$ ,  $(r, \theta)$  – локальные координаты в окрестности границы  $S$  [1],  $r \in [0, \delta]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\delta > 0$ .

Подставляя разложение (3) в задачу (1), (2), получаем задачу для определения коэффициентов разложения (3). Для нахождения функций  $\bar{u}_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , имеем конечные уравнения. Например,  $\bar{u}_1(x) =$

$= (\mathbf{A}(x), \nabla \varphi(x)) f_u^{-1}(\varphi(x), x)$ . Если граница  $S$  описывается явными уравнениями вида  $y_1 = R(\theta) \cos \theta$ ,  $y_2 = R(\theta) \sin \theta$ ,  $(y_1, y_2) \in S$ , то функции  $\Pi_n u(\rho, \theta)$  при  $n \geq 1$  определяются задачами для уравнений второго порядка:

$$k(0, \theta) \frac{\partial^2 \Pi_n u}{\partial \rho^2} - N(\theta) \frac{\partial \Pi_n u}{\partial \rho} + f_u(\varphi(0, \theta), 0, \theta) \Pi_n u = H_n(\rho, \theta), \quad \rho > 0$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \Pi_n u(0, \theta)}{\partial \rho} = q_n(\theta), \quad \Pi_n u(+\infty, \theta) = 0.$$

Здесь  $H_n(\rho, \theta)$ ,  $q_n(\theta)$  – известные функции, например,  $H_1(\rho, \theta) = 0$ ,  $q_1(\theta) = -\bar{g}(0, \theta) - \frac{\partial \varphi(0, \theta)}{\partial r}$ ;  $N(\theta) := -\Psi^{-1/2}(\theta)[(R'(\theta) \sin \theta + R(\theta) \cos \theta) A_1(0, \theta) - (R'(\theta) \cos \theta - R(\theta) \sin \theta) A_2(0, \theta)]$ ,  $\Psi(\theta) = (R'(\theta))^2 + R^2(\theta)$ . Используя явный вид решений данных задач, который можно получить по аналогии с [12], легко установить справедливость экспоненциальных оценок:

$$|\Pi_n u| \leq C_n \exp(-\kappa_n \rho),$$

$$\kappa_n > 0, \quad C_n > 0, \quad n \geq 1.$$

Доказательство существования решения задачи (1), (2) с асимптотическим представлением (3) и оценка остаточного члена основаны на использовании принципа сравнения [13, 2]. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) строятся в виде

$$\alpha_n^{(\pm)}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^n (\pm \mu + \varepsilon \Pi_{n+1} u(\rho, \theta)),$$

где  $U_n(x, \varepsilon) := \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + \Pi_i u(\rho, \theta))$ ,  $\mu > 0$  – достаточно малое, не зависящее от  $\varepsilon$  значение. С использованием результатов [13] доказывается

**Т е о р е м а 1.** *При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  существует классическое решение  $u(x, \varepsilon)$  задачи (1), (2), имеющее асимптотическое представление (3) такое, что  $\max_{x \in G \cup S} |u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1})$ .*

Решение  $u(x, \varepsilon)$  задачи (1), (2) является устойчивым по Ляпунову стационарным решением параболической задачи [13]:

$$\bar{L}_\varepsilon v := \varepsilon^2 (\nabla(k(x) \nabla v) - v_t) - \varepsilon(\mathbf{A}(x), \nabla v) + f(v, x) = 0,$$

$$x \in G \subset R^2, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$-\varepsilon k(x)(\nabla v, \mathbf{n}) = g(x), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$v(x, 0) = u^0(x), \quad x \in G \cup S$$

при  $u^0(x) = u(x, \varepsilon)$ . Далее считаем выполненным условие согласования:  $-\varepsilon k(x)(\nabla u^0, \mathbf{n}) = g(x)$ ,  $x \in S$ . Легко показать, что упорядоченная пара функций

$\bar{\alpha}^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) - (u(x, \varepsilon) - \alpha_0^{(\pm)}(x, \varepsilon))e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda > 0$  – параметр, является, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (4), (5) [13]. В частности, так как  $(u(x, \varepsilon) - \alpha_0^{(\pm)}(x, \varepsilon)) = O(\mu)$ , то  $\bar{L}_\varepsilon \bar{\alpha}^{(-)}(x, t, \varepsilon) \geq 0$ ,  $\bar{L}_\varepsilon \bar{\alpha}^{(+)}(x, t, \varepsilon) \leq 0$ . Из чего следует

**Теорема 2.** При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  стационарное решение  $u(x, \varepsilon)$  задачи (4), (5), имеющее асимптотическое представление (3), асимптотически устойчиво по Ляпунову с локальной областью притяжения:  $u^0(x) \in [\alpha_0^{(-)}(x, \varepsilon), \alpha_0^{(+)}(x, \varepsilon)]$ .

При определенных ограничениях на функцию  $f(u, x)$  имеет место

**Теорема 3.** Если  $f_u(u, x) \leq 0$ ,  $x \in G \cup S$ , то задача (1), (2) не может иметь более одного классического решения.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что задача  $L_\varepsilon w = 0$ ,  $x \in G$ ,  $(\nabla w, \mathbf{n}) = 0$ ,  $x \in S$ , относительно функции  $w(x) := u_2(x, \varepsilon) - u_1(x, \varepsilon)$ , где  $L_\varepsilon := \varepsilon^2 \nabla(k(x) \nabla) - \varepsilon(\mathbf{A}(x), \nabla) + \int_0^1 f_u(u_\xi, x) d\xi$ ,  $u_\xi := \xi u_2 + (1 - \xi)u_1$ ,  $u_i(x, \varepsilon)$  – совпадающие классические решения задачи (1), (2), имеет только тривиальное решение. Действительно, для любой функции  $v(x) \in C^2(G) \cap C^1(G \cup S)$  справедливо равенство

$$\int_G v L_\varepsilon w d\tau = \varepsilon^2 \int_G [\nabla(k(x) v \nabla w) - k(x)(\nabla v, \nabla w)] d\tau - \varepsilon \int_G v \nabla(w \mathbf{A}) d\tau + \int_G \int_0^1 f_u(u_\xi, x) d\xi d\tau.$$

Если положить  $v \equiv w$  и учесть, что на границе поток обусловлен только диффузией, т.е. что  $(\mathbf{A}(x), \mathbf{n}) = 0, x \in S$ , то получим  $w \equiv 0, x \in G \cup S$ .

### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ

Поскольку на основе метода [11] устанавливается интегральное содержание  $\text{NO}_2$  в вертикальном столбе атмосферы высотой  $H - H_0$ , где  $H$  – средняя высота пограничного слоя,  $H_0 \approx 10^4$  см (средняя высота дымовых труб), то с целью описания средней концентрации  $\text{NO}_2$  в шлейфе источника удобно использовать  $(x_1, x_2)$  – приближение [9] эффективного прогностического уравнения:

$$u_t = \langle k \rangle \Delta u - \nabla(u \mathbf{A}(x)) + f_{\text{NO}_2}(x) - \gamma(t)(u - U), \quad \nabla \mathbf{A}(x) = 0, \quad (6)$$

$$x \in G \in R^2, \quad t \in (t_0, t_0 + T]$$

с дополнительными условиями, соответствующими условиям изолированности источника:

$$-\langle k \rangle (\nabla u, \mathbf{n}) = 0, \quad x \in S, \quad (7)$$

$$u(x, t_0) = u^0(x), \quad x \in G \cup S,$$

где  $u(x_1, x_2, t)$  и  $u^0(x)$  – распределение интегрального содержания  $\text{NO}_2$  в столбе воздуха высотой  $H - H_0$  при  $t > t_0$  и  $t = t_0$ ,  $\langle k \rangle$  – среднее значение горизонтального коэффициента турбулентной диффузии,  $\mathbf{A}(x) = \{A_1(x), A_2(x)\}$  – средняя скорость горизонтального переноса,  $f_{\text{NO}_2}(x)$  – распределение интегральной мощности выброса (образования)  $\text{NO}_2$  в реакции окисления (взаимодействия  $\text{NO}$  с  $\text{O}_3$ ),  $\gamma(t)$  – эффективная скорость распада  $\text{NO}_2$ . Слагаемое “ $-\gamma(t)(u - U)$ ” моделирует сток  $\text{NO}_2$  в результате серии химических превращений,  $U$  – региональное фоновое интегральное содержание  $\text{NO}_2$ . Зависимостью вектора  $\mathbf{A}(x)$  от вертикальной координаты пренебрегаем.

Определим круговую область  $G$ , центр которой совмещен с источником загрязнения, а радиус  $L \sim 10^5$  см (ближняя зона). В такой области мощность выброса диоксида азота в результате реакции окисления оксида азота по порядку величины равна мощности стока этой примеси при первичном фотолизе. Учитывая это и обозначая  $\varepsilon := (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \sim 10^{-2}$ , где  $\text{Pr}_D$  – турбулентное диффузионное число Прандтля,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса, получаем задачу (6), (7) в ближней зоне в безразмерных переменных:

$$\varepsilon^2 (\Delta u - u_t) - \varepsilon(\mathbf{A}(x), \nabla u) + f_{\text{NO}_2}(x) - \gamma(t)(u - 1) = 0, \quad x \in K^1, \quad t \in (t_0, t_0 + 1], \quad (8)$$

$$(\nabla u, \mathbf{n}) = 0, \quad x \in \partial K^1, \quad (9)$$

$$u(x, t_0) = u^0(x), \quad x \in K^1 \cup \partial K^1.$$

Здесь  $\partial K^1$  – граница круга  $K^1$  единичного радиуса. В задаче (8), (9) сохранены прежние обозначения для безразмерных переменных в целях удобства.

Если  $T \approx 1$  ч, то эффективную скорость распада можно считать постоянной величиной, и тогда в ближней зоне распределение безразмерной концентрации  $\text{NO}_2$  будет описывается задачей (8), (9) при замене  $\gamma(t)$  на константу  $\gamma \sim 1$ . Полученная таким образом задача относится к типу (4), (5). Поэтому существует единственное стационарное устойчивое состояние, описываемое безразмерным распределением типа (3):

$$u_{st}(x, \varepsilon) = 1 + f_{\text{NO}_2}(x) \gamma^{-1} - \varepsilon(\mathbf{A}(x), \nabla f_{\text{NO}_2}(x)) \gamma^{-2} + \varepsilon(\mathbf{n}, \nabla f_{\text{NO}_2}((1-r) \cos \theta, (1-r) \sin \theta)) \Big|_{r=0} \times (10)$$

$$\times (\gamma Y(\theta))^{-1} e^{-Y(\theta)r \varepsilon^{-1}} + O(\varepsilon^2),$$

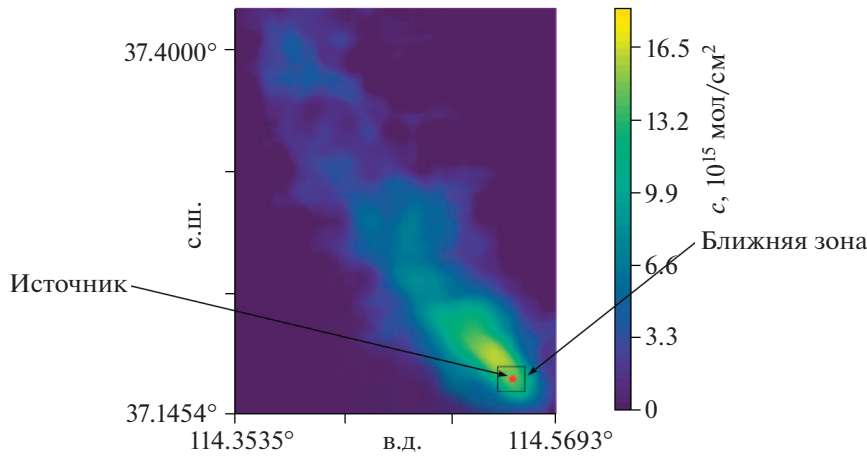


Рис. 1. Распределение интегрального содержания диоксида азота в пограничном слое атмосферы в провинции Хэбэй 29.09.2018 г.

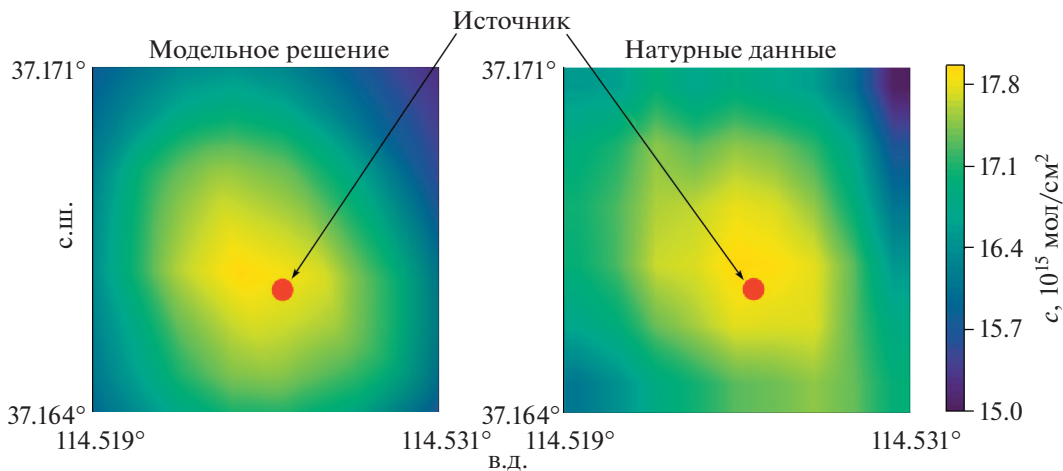


Рис. 2. Фрагмент шлейфа, представляющий ближнюю зону.

где  $Y(\theta) := 2^{-1}[B(\theta) + \sqrt{B^2(\theta) + 4\gamma}]$ ,  $B(\theta) := A_1(0, \theta) \times \cos\theta + A_2(0, \theta)\sin\theta$ ,  $A_i(0, \theta) := A_i(\cos\theta, \sin\theta)$ ,  $x_1 = (1 - r)\cos\theta$ ,  $x_2 = (1 - r)\sin\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Стабилизация решения задачи (8), (9) при  $\gamma(t) = \gamma$  к решению с асимптотикой (10) происходит за время  $T_{st} \ll 1$ . Действительно, асимптотическое решение задачи (8), (9) при  $\gamma(t) = \gamma$  можно построить на основе метода углового погранслоя [1]:  $u(x, t, \epsilon) = 1 + f_{NO_2}(x)\gamma^{-1} + (u^0(x) - 1 - f_{NO_2}(x)\gamma^{-1})e^{-\gamma t \epsilon^{-2}} + O(\epsilon)$  и обосновать построение на основе методов [13]. При  $|u(x, T_{st}, \epsilon) - u_{st}(x, \epsilon)| \leq O(10^{-2})$ ,  $T_{st} \sim 10^{-2}$ , что соответствует размерному времени стабилизации около одной минуты. Эта оценка доказывает квазистационарный характер процесса (см. подробнее [9]) в ближней зоне и оправдывает использование асимптотики (10) с целью получения распределения интегрального содержания  $NO_2$  в столбе воздуха на временном интервале около часа.

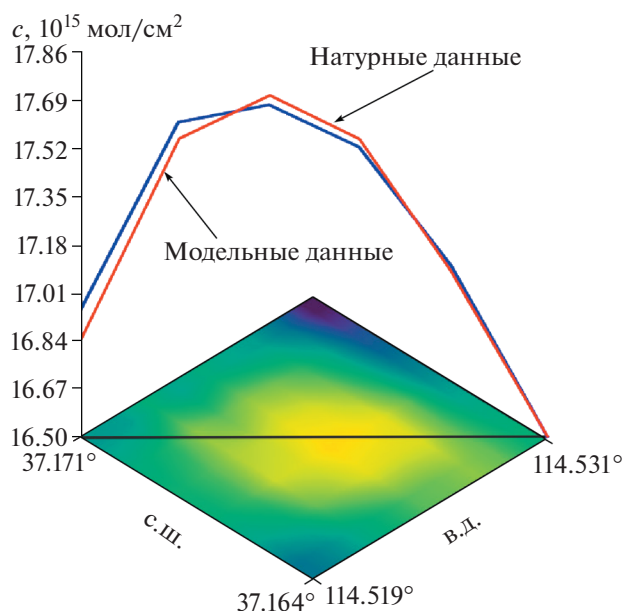
В формуле (10) интенсивность источника задается следующим образом:

$$f_{NO_2}(x) = \alpha_{NO_2} \tilde{\gamma} u_{NO}(x) u_{O_3}(x), \quad (11)$$

где  $\tilde{\gamma} u_{NO}(x) u_{O_3}(x)$  – мощность стока  $NO$  в реакции окисления,  $u_{O_3}(x)$  – распределение интегрального содержания озона,  $\tilde{\gamma}$  – скорость реакции, коэффициент трансформации  $\alpha_{NO_2} = 0.55$ . Распределение интегрального содержания оксида азота  $u_{NO}(x)$  задается двумерной функцией Гаусса с параметрами ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ) и амплитудой  $l$ . Поэтому распределение интегрального содержания  $NO_2$  в столбе воздуха в размерных переменных (мол/см<sup>2</sup>) описывается функцией:

$$u_{NO_2}(x) = U \cdot u_{st}(x', \epsilon), \quad (12)$$

где  $U = 2.7 \times 10^{15}$  мол/см<sup>2</sup>,  $x' = xL^{-1}$ ,  $L \sim 10^5$  см, функция  $u_{st}(x', \epsilon)$  определяется распределениями (10), (11).



**Рис. 3.** Сравнение аналитического решения (12) и натурального распределения интегрального содержания  $\text{NO}_2$  в ближней зоне в разрезе (учтен региональный фон, равный  $2.7 \times 10^{15}$  мол/см<sup>2</sup>).

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКА И ОЦЕНКА ЭМИССИЙ

С целью восстановления параметров  $\sigma$  и  $l$  в распределении (11) применяется алгоритм решения коэффициентной обратной задачи [10], где в качестве решения прямой задачи в ближней зоне используется распределение (12). В итоге получены следующие значения:  $\sigma = 500$  см и  $l = 2 \times 10^4$ . На рис. 1 показано распределение интегрального содержания диоксида азота ( $\text{NO}_2$ ) в вертикальном столбе атмосферы в пределах ее пограничного слоя (0–2 км) в провинции Хэбэй КНР 29 сентября 2018 г. Распределение построено по данным наблюдений с российского спутника Ресурс-П, оборудованного гиперспектрометром изображения [11]. Впервые в мире распределение  $\text{NO}_2$  получено с высоким разрешением 2.4 км на сетке 120 м, которое позволяет выделять источники загрязнения атмосферы размером с отдельные промышленные предприятия. На фоне регионального загрязнения выделяется шлейф  $\text{NO}_2$  от химического предприятия по производству сажи и других продуктов, получаемых при переработке угля. Содержание  $\text{NO}_2$  в выбросе предприятием оксидов азота  $\text{NO}_x$  ( $\text{NO}_x = \text{NO} + \text{NO}_2$ ) составляет 10%, но в течение нескольких минут в результате взаимодействия  $\text{NO}$  с озоном доля  $\text{NO}_2$  в  $\text{NO}_x$  увеличивается до 55% [14, 15]. На рис. 2 и 3 изображено распределение  $\text{NO}_2$  в ближней зоне источника, сформированное при ветре в момент наблюдений 1 м/с в ре-

зультате выброса  $\text{NO}_x$  из источника в течение одного часа, действия химической трансформации и турбулентной диффузии.

Используя представление (12) с восстановленными параметрами, получаем оценку среднего интегрального содержания  $\text{NO}_2$  за вычетом регионального фона в ближней зоне:  $15 \times 10^{15}$  мол/см<sup>2</sup>. Мощность выброса  $\text{NO}_2$  (эмиссии) определяется формулой

$$M_{\text{NO}_2} = \frac{V^2 U}{\langle k \rangle R^2} \int_{R^2} f_{\text{NO}_2}(x) dx, \quad (13)$$

где  $V$  – характерная скорость переноса. Используя формулу (13) при  $V = 100$  см/с, получаем оценку эмиссий  $\text{NO}_2$ : 100 кг/ч. Данный пример демонстрирует возможность применения современных космических средств и математических методов для мониторинга качества воздуха в пределах городов и идентификации основных источников загрязнения атмосферы практически на всей территории планеты.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дистанционное зондирование состава атмосферы с космических аппаратов активно используется для мониторинга его региональных и глобальных изменений. Совершенствование космических аппаратов и средств измерений делает возможным контролировать локальные особенности состава атмосферы и, следовательно, качество воздуха в городах, а также в окрестностях загрязняющих атмосферу предприятий. Первым примером реализации таких возможностей являются наблюдения со спутника Ресурс-П содержания в пограничном слое атмосферы важного химически активного соединения – диоксида азота. На основе метода [11] и алгоритма [10] с использованием распределения (11) получены оценки эмиссий  $\text{NO}_2$  (100 кг/ч). Разработанный эффективный алгоритм восстановления распределения концентрации примеси в ближней зоне источника загрязнения позволяет в короткое время выполнить оценку выбросов предприятиями загрязнений в атмосферу, что открывает широкие перспективы для оперативного мониторинга локальных особенностей загрязнения атмосферы в глобальном масштабе. Другим приложением результатов работы является прогнозирование поведения шлейфов загрязнений и образования экстремальных экологических ситуаций.

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работы выполнены при поддержке РФФИ по проектам 18-29-10080 (построение модели и разработка алгоритма – М.А. Давыдова и С.А. Захарова, анализ результатов – совместно), 20-05-00826 (обработка дан-

ных космического зондирования – О.В. Постыляков), 19-05-50088 (анализ метеорологических данных – Н.Ф. Еланский).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2010. № 268. С. 268.
3. *Волков В.Т., Лукьяненко Д.В., Нефедов Н.Н.* Аналитико-численный подход для описания периодических по времени движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях реакция–диффузия–адвекция // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 1. С. 50–62.
4. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
5. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргерса // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 6. С. 975–984.
6. *Давыдова М.А., Захарова С.А.* Асимптотический анализ в задачах нелинейного теплообмена и его приложения. // Марчукские научные чтения 2020: Тезисы Междунар. конф., посв. 95-летию со дня рождения акад. Г.И. Марчука, Новосибирск, 19–23 октября 2020 г./ Ин-т вычислит. математики и матем. геофизики СО РАН. Новосибирск: ИПН НГУ, 2020. С. 10.
7. *De More W.B. et al.* Chemical Kinetics and Photochemical Data for Use in Stratospheric Modeling // NASA, California Institute of Technology. 1997.
8. *Пономарев Н.А., Еланский Н.Ф., Кирсанов А.А., Постыляков О.В., Боровский А.Н., Веревкин Я.М.* Применение химико-транспортных моделей атмосферы для валидации эмиссий загрязняющих примесей в Москве // Оптика атмосферы и океана. 2020. Т. 33. № 2. С. 119–126.
9. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
10. *Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukyanenko D.V.* Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1785443>
11. *Postylyakov O.V., Borovski A.N., Makarenkov A.A.* First experiment on retrieval of tropospheric NO<sub>2</sub> over polluted areas with 2.4-km spatial resolution basing on satellite spectral measurements // Proc. of SPIE – The International Society for Optical Engineering. 2017. V. 10466. P.104662Y-8.
12. *Давыдова М.А.* Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 853–864.
13. *Wang J.* Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients // Nonlin. Anal. 1998. V. 12. № 1. P. 19–41.
14. *Elansky N.F., Ponomarev N.A., Verevkin Ya.M.* Air quality and pollutant emissions in the Moscow megacity in 2005–2014 // Atmospheric Environment. V. 175. February 2018. P. 54–64.
15. *Elansky N.F., Shilkin A.V., Ponomarev N.A., Semutnikova E.G., Zakharova P.V.* Weekly patterns and weekend effects of air pollution in the Moscow megacity. Atmospheric Environment. 2020. V. 224. 117303.

APPLICATION OF A NUMERICAL-ASYMPTOTIC APPROACH TO THE PROBLEM OF RESTORING THE PARAMETERS OF A LOCAL STATIONARY SOURCE OF ANTHROPOGENIC POLLUTION

M. A. Davydova<sup>a</sup>, Corresponding Member of RAS N. F. Elansky<sup>b</sup>, S. A. Zakharova<sup>a</sup>, and O. V. Postylyakov<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup> Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

The application of the numerical-asymptotic approach to the solution of some coefficient inverse problems of the diffusion of impurities in the atmosphere is considered. The asymptotic solution of the direct problem for an effective prognostic equation in the near-field zone of the source, obtained as a result of a rigorous asymptotic analysis of the multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problem, is used as a priori information for the construction of the numerical algorithm for solving the inverse problem for recovering the parameters of a source of anthropogenic pollution. The implementation of the algorithm is based on the use of data from sounding the composition of the Earth’s atmosphere from the Russian satellite Re-surs-P, obtained with a record high spatial resolution. For the first time, using high-precision space monitoring and mathematical methods, an estimate of the emissions of an atmospheric pollutant (nitrogen dioxide) by an isolated industrial enterprise was obtained.

**Keywords:** singularly perturbed reaction-diffusion-advection models, asymptotic methods, coefficient inverse problems, estimation of pollutant emissions, high-precision satellite imagery of tropospheric NO<sub>2</sub>