ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 53–55

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Г. Романов[1,2,*]

Поступило 03.11.2020 г.
После доработки 02.12.2020 г.
Принято к публикации 07.12.2020 г.

Для системы уравнений электродинамики изучается обратная задача об определении анизотропной проводимости. Предполагается, что проводимость описывается диагональной матрицей $\sigma(x) = \operatorname{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$, причем $\sigma(x) = 0$ вне области $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $R > 0$, а диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости среды являются положительными постоянными всюду в $\mathbb{R}^3$. Рассматриваются плоские бегущие волны, падающие из бесконечности на неоднородность, локализованную в Ω. Для определения искомых функций $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$ задается некоторая информация о векторе электрической напряженности поля на границе S области Ω. Показано, что эта информация приводит исходную задачу к трем идентичным задачам рентгеновской томографии.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, анизотропия, проводимость, плоские волны, обратная задача, томография

DOI: 10.31857/S2686954321010094

Рассмотрим нестационарную систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\mathbf{E}_t + \sigma(x)\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}_t, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{1}$$

В уравнениях (1) $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ – векторы электрической и магнитной напряженности поля, $\sigma(x) = \operatorname{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$ – неотрицательно определенная диагональная матрица, ε и μ – некоторые положительные постоянные. Предположим, что вне области $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $R > 0$, матрица $\sigma(x) = 0$.

Обозначим через $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ – скорость распространения электромагнитных волн. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $|\nu| = 1$, и $\mathbf{j}$ – единичный вектор, ортогональный ν, т.е. $\mathbf{j} \cdot \nu = 0$.

Для системы уравнений Максвелла (1) в однородной среде ($\sigma(x) = 0$) существуют решения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(x, t, \nu, \mathbf{j}) &= \mathbf{j} f\left(t + t_0 - \frac{x \cdot \nu}{c}\right), \\ \mathbf{H}^0(x, t, \nu, \mathbf{j}) &= \frac{\nu \times \mathbf{j}}{\mu c} f\left(t + t_0 - \frac{x \cdot \nu}{c}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

в которых $t_0 = \min\limits_{x \in \Omega} \dfrac{x \cdot \nu}{c} = -\dfrac{R}{c}$, а $f(t)$ – произвольная обобщенная функция. Каждое такое решение представляет собой плоскую волну, бегущую в направлении вектора ν, и является обобщенным решением уравнений Максвелла для однородной среды.

Рассмотрим задачу Коши для анизотропной среды

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\mathbf{E}_t + \sigma(x)\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}_t, \\ &\mathbf{E}\big|_{t<0} = \mathbf{E}^0(x, t, \nu, \mathbf{j}), \quad \mathbf{H}\big|_{t<0} = \mathbf{H}^0(x, t, \nu, \mathbf{j}), \end{aligned} \tag{3}$$

в которой $\mathbf{E}^0(x, t, \nu, \mathbf{j})$ и $\mathbf{H}^0(x, t, \nu, \mathbf{j})$ определены формулами (2), и при этом $f(t)$ – некоторая гладкая функция, такая, что $f(t) \equiv 0$ для $t \le 0$ и $f(+0) \ne 0$. Таким образом, $\mathbf{E}(x, t, \nu, \mathbf{j}) = 0$, $\mathbf{H}(x, t, \nu, \mathbf{j}) = 0$ для всех $x \cdot \nu \ge ct_0$ при $t < 0$. Пусть $\Sigma(\nu) =: \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \nu = ct_0\}$ – плоскость, соответствующая фронту плоской волны в момент $t = 0$, когда этот фронт касается области Ω.

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2] *Математический центр в Академгородке при Новосибирском государственном университете, Новосибирск, Россия*
**E-mail: romanov@math.nsc.ru*

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$ – граница области Ω и $S^+(\nu) = \{x \in S \mid x \cdot \nu > 0\}$ – ее теневая часть по отношению к потоку света, имеющего направление ν.

Ниже мы будем рассматривать задачу (3) для трех различных векторов $\mathbf{j}^k$, $k = 1, 2, 3$, и соответствующих им ортогональных векторов ν^k, зависящих от углового параметра φ, а именно,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{j}^1 = (1,0,0), \quad \nu^1(\varphi) = (0,\cos\varphi,\sin\varphi), \quad \varphi \in [0,\pi],\\
&\mathbf{j}^2 = (0,1,0), \quad \nu^2(\varphi) = (\cos\varphi,0,\sin\varphi), \quad \varphi \in [0,\pi],\\
&\mathbf{j}^3 = (0,0,1), \quad \nu^3(\varphi) = (\cos\varphi,\sin\varphi,0), \quad \varphi \in [0,\pi].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Обратная задача. Найти $\sigma(x)$ по функциям $E_k(x,t,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k)$, $k = 1, 2, 3$, известным для всех $x \in S^+(\nu^k(\varphi))$, $\varphi \in [0,\pi]$, и $t \in [0, T_k(x,\varphi)]$, где $T_k(x,\varphi) = \dfrac{x \cdot \nu^k(\varphi)}{c} - t_0 + \delta_0$ и $\delta_0 > 0$ – произвольное число (возможно малое). Другими словами, требуется найти $\sigma(x)$ по заданным функциям

$$
\begin{aligned}
&F_k(x,t,\varphi) = E_k(x,t,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k), \qquad k = 1, 2, 3,\\
&x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0,\pi], \quad t \in [0, T_k(x,\varphi)].
\end{aligned} \tag{5}
$$

Обратные задачи об определении проводимости среды, являющейся функцией одной переменной, изучались для стационарных уравнений электродинамики в работах А.Н. Тихонова [1–4] и Л. Каньяра [5]. Для нестационарных уравнений теория обратных задач электродинамики с использованием полной системы уравнений Максвелла была развита в работах [6–8]. Задача об определении диэлектрической проницаемости анизотропной среды рассмотрена в работе [9]. Изучены также бесфазовые обратные задачи об определении диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической или магнитной напряженностей стационарного электромагнитного поля (см. [10], а также обзорную статью [11]).

Для поставленной выше обратной задачи имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть матрица $\sigma(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ и равна нулю вне Ω, а функция $f(t)$ имеет вид $f(t) = \hat{f}(t)\theta_0(t)$, в котором $\hat{f}(t)$ – гладкая функция класса $C^2[0,\infty)$ и $\hat{f}(0) \neq 0$, а $\theta_0(t)$ – функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$. Тогда информация* (5) *однозначно определяет все элементы матрицы $\sigma(x)$ в области Ω.*

Основой исследования обратной задачи является изучение структуры решения задачи (3). Удобно при этом использовать интегро-дифференциальное уравнение для вектора $\mathbf{E}(x,t,\nu,\mathbf{j})$. Чтобы его найти, применим операцию rot ко второму уравнению (3) и воспользуемся первым уравнением для исключения возникающего члена $\operatorname{rot}\mathbf{H}_t$. Тогда получим уравнение

$$
(-\Delta + \nabla\operatorname{div})\mathbf{E} = -\mu\varepsilon\mathbf{E}_{tt} - \mu\sigma(x)\mathbf{E}_t. \tag{6}
$$

Вычисляя $\operatorname{div}\mathbf{E}$ с помощью первого уравнения (3), находим, что

$$
\operatorname{div}\mathbf{E}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\int_{-\infty}^{t} \sigma(x)\mathbf{E}(x,\tau,\nu,\mathbf{j})d\tau. \tag{7}
$$

Из равенств (6), (7) и (3) следует, что функция $\mathbf{E}$ является решением задачи Коши:

$$
\begin{aligned}
&c^{-2}\mathbf{E}_{tt} - \Delta\mathbf{E} + \mu\sigma(x)\mathbf{E}_t -\\
&- \frac{1}{\varepsilon}\nabla\operatorname{div}\int_{-\infty}^{t} \sigma(x)\mathbf{E}(x,\tau,\nu,\mathbf{j})d\tau = 0,\\
&\mathbf{E}\big|_{t<0} = \mathbf{E}^0(x,t,\nu,\mathbf{j}).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Для задачи (8) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для матрицы $\sigma(x)$ и функции $f(t)$ выполнены условия теоремы 1. Тогда функция $\mathbf{E}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ при $t \geq 0$ представима в виде*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(x,t,\nu,\mathbf{j}) &= \alpha(x,\nu,\mathbf{j})\theta_0\left(t + t_0 - \frac{x\cdot\nu}{c}\right) +\\
&+ \hat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j})\theta_1\left(t + t_0 - \frac{x\cdot\nu}{c}\right),
\end{aligned} \tag{9}
$$

в котором $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$, функция $\alpha(x,\nu,\mathbf{j})$ является решением задачи Коши:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{c}(\nu\cdot\nabla)\alpha + \mu\sigma(x)\alpha - \frac{1}{\varepsilon c^2}\nu((\sigma(x)\alpha)\cdot\nu) = 0,\\
&\alpha\big|_{x\cdot\nu = ct_0} = \mathbf{j}\hat{f}(0),
\end{aligned} \tag{10}
$$

а функция $\hat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ является ограниченной функцией переменных x, t для $t \in \left[\dfrac{x\cdot\nu}{c} - t_0, T\right]$ при любом $T > 0$.

Уравнение (10) получается в результате подстановки представления (9) в уравнение (8) и приравнивания в нем нулю коэффициентов при $\delta\left(t + t_0 - \dfrac{x\cdot\nu}{c}\right)$, начальные данные для функции $\alpha(x,\nu,\mathbf{j})$ следуют из начальных данных для функции $\mathbf{E}(x,t,\nu,\mathbf{j})$. Функция $\alpha(x,\nu,\mathbf{j})$ является амплитудой функции $\mathbf{E}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ на фронте электромагнитной волны, т.е. при $t = \dfrac{x\cdot\nu}{c} - t_0$. Уравнение (10) является обыкновенным дифференциальным векторным уравнением вдоль любого луча $x = x^0 + s\nu$, $s \in \mathbb{R}^1$, выходящего из произвольной точки $x^0 \in \mathbb{R}^3$. Для случая (4) отдельные компоненты векторов $\alpha(x,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k) = (\alpha_1(x,u^k(\varphi),\mathbf{j}^k),$

$\alpha_2(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k)$, $\alpha_3(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k)$ вычисляются в явном виде, а именно,

$$\alpha_k(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k) = \\ = \hat{f}(0)\exp\left(-\frac{\mu c}{2}\int_0^\infty \sigma_k(x - s\nu^k(\varphi))ds\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Эти же компоненты вычисляются по данным (5) обратной задачи

$$\alpha_k(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k) = g_k(x, \varphi) =: \lim_{t \to (x\cdot\nu^k(\varphi))/c - t_0} F_k(x, t, \varphi),$$
$$x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad k = 1, 2, 3.$$

Из этих формул следует, что известны интегралы

$$\int_0^\infty \sigma_k(x - s\nu^k(\varphi))ds = -\frac{2}{\mu c}\ln\frac{g_k(x, \varphi)}{\hat{f}(0)}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{11}$$

для всех $x \in S^+(\nu^k(\varphi))$ и $\varphi \in [0, \pi]$.

Таким образом, правая часть равенства (11) при каждом $k = 1, 2, 3$ известна вдоль любой прямой, пересекающей Ω и имеющей направление $\nu^k(\varphi)$. Варьируя φ, получаем, что в каждом сечении Ω плоскостью $x_k = \mathrm{const}$ известны интегралы по всевозможным прямым, лежащим в этой плоскости. В результате мы приходим к задаче рентгеновской томографии для определения $\sigma_k(x)$, $k = 1, 2, 3$. Хорошо известно (см. [12–14]), что эта задача решается однозначно. Отсюда следуют теорема 1 о единственности решения обратной задачи и алгоритм ее решения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке при Новосибирском государственном университете (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1946. Т. 10. № 3. С. 213–231.
2. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1949. Т. 60. № 5. С. 797–800.
3. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 2. С. 295–297.
4. *Тихонов А.Н.* // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 545–548.
5. *Cagniard L.* // Geophysics. 1953. V. 187. № 3. P. 605–635.
6. *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
7. *Karchevsky A.L.* // J. Inv. and Ill-Posed Problems. 2009. V. 17. № 4. P. 385–402.
8. *Романов В.Г.* // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 4. С. 861–875.
9. *Романов В.Г.* // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 6. С. 134–141.
10. *Карчевский А.Л., Дедок В.А.* // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 12. № 3. С. 50–59.
11. *Романов В.Г.* // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 6. С. 142–160.
12. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
13. *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography (Classics in Applied Mathematics, 32). PA Philadelphia: SIAM, 2001.
14. *Finch D.* // Inverse Problems. 1986. V. 2. № 2. P. 197–203.

PROBLEM OF DETERMINATION OF THE ANISOTROPIC CONDUCTIVITY IN ELECTRODYNAMIC EQUATIONS

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov[a,b]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*
[b] *Mathematical Center in Akademgorodok, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

For the system of electrodynamic equations an inverse problem of determination of the anisotropic conductivity is considered. It is supposed that the conductivity is described by a diagonal matrix $\sigma(x) = \mathrm{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$ and $\sigma(x) = 0$ outside of the domain $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $R > 0$, and the permittivity ε and the permeability μ of the medium are positive constants anywhere in $\mathbb{R}^3$. The plain waves running from infinity and falling down on the inhomogeneity localized in Ω are considered. For determination of unknown functions $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$ an information related to the vector of electric intensity is given on the boundary S of domain Ω. It is demonstrated that this information reduces the inverse problem to three identical problems of X-ray tomography.

Keywords: Maxwell equations, anisotropy, conductivity, plane waves, inverse problem, tomography