

УДК 517.444

НЕПРЕРЫВНОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ В СРЕДНЕМ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ОТРЕЗКА

© 2021 г. В. В. Волчков^{1,*}, Вит. В. Волчков^{1,**}

Представлено академиком РАН С.В. Конягиным 09.01.2021 г.

Поступило 09.01.2021 г.

После доработки 09.01.2021 г.

Принято к публикации 25.01.2021 г.

Изучается следующий вариант проблемы периодического в среднем продолжения.

- (i) Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ и E — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. При каких условиях для функции $f \in C(E)$ существует функция $F \in C(\mathbb{R}^n)$, совпадающая с f на E , такая что $f * T = 0$ в $\mathbb{R}^n$?
- (ii) Если такое продолжение F существует, то что можно сказать о его росте на бесконечности?
- Получено решение этой проблемы для широкого класса распределений T в случае, когда множество E является отрезком в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: уравнения свертки, периодичность в среднем, сферическое преобразование, квазианалитичность

DOI: 10.31857/S2686954321010185

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Обозначим $\mathcal{D}'(\mathbb{O})$ (соответственно, $\mathcal{E}'(\mathbb{O})$) пространство распределений (соответственно, распределений с компактными носителями) в области $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\mathbb{O})$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{O}$ функций, $\mathcal{E}(\mathbb{O}) = C^\infty(\mathbb{O})$. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$, $\text{supp } T$ — носитель T ,

$$\mathbb{O}^T = \{x \in \mathbb{R}^n : x - y \in \mathbb{O} \text{ для любого } y \in \text{supp } T\}.$$

Предположим, что множество $\mathbb{O}^T$ является непустым. Тогда для всякого $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{O})$ свертка $f * T$ определяется равенством $\langle f * T, \varphi \rangle = \langle f_y, \langle T_x, \varphi(x + y) \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{O}^T) \rangle$, как распределение в $\mathcal{D}'(\mathbb{O}^T)$ (индекс внизу у распределений f и T означает действие по указанной переменной). Распределения из класса $\mathcal{D}'_T(\mathbb{O}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{O}) : f * T = 0 \text{ в } \mathbb{O}^T\}$ называются периодическими в среднем в области $\mathbb{O}$ относительно T . Если $\mathcal{M}(\mathbb{O})$ — некоторое подмножество в $\mathcal{D}'(\mathbb{O})$, то для пересечения $\mathcal{D}'_T(\mathbb{O}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{O})$

будем использовать символ $\mathcal{M}_T(\mathbb{O})$. Например, $C^\infty_T(\mathbb{O}) = \mathcal{D}'_T(\mathbb{O}) \cap C^\infty(\mathbb{O})$.

Одной из важных проблем в теории уравнений свертки является проблема продолжения, которая формулируется следующим образом.

Проблема 1. (i) Пусть $f \in \mathcal{M}_T(\mathbb{O})$ и область $\mathbb{O}_1$ содержит $\mathbb{O}$. При каких условиях существует $F \in \mathcal{M}_T(\mathbb{O}_1)$, совпадающее с f на $\mathbb{O}$?

(ii) Если такое продолжение F существует, то будет ли оно единственным?

Даже одномерный случай проблемы 1 является весьма содержательным и имеет глубокие связи с различными разделами анализа. Этот случай изучался в работах Ж.П. Кахана, В.Д. Головина, А.Ф. Леонтьева, А.М. Седлецкого и других авторов (см. [1–7] и библиографию к этим работам). В данном случае ответ в проблеме 1 (ii) является положительным для любого ненулевого $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ в силу теоремы Титчмарша о носителе свертки (см. [8, теорема 4.3.3], а также [4, часть 3, гл. 1, теорема 1.1]). В проблеме 1 (i) ответ существенно зависит от свойств T , связанных с распределением нулей преобразования Фурье распределения T , т.е. целой функции $\hat{T}(z) = \langle T, e^{-izt} \rangle, z \in \mathbb{C}$.

Наиболее сильные результаты в этом направлении для классов $\mathcal{D}'_T$ и C^∞_T были получены в работах [4, часть 3; 7]. В частности, было показано,

¹ Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

*E-mail: valeriyvolchikov@gmail.com

**E-mail: volna936@gmail.com

что для этих классов продолжение в проблеме 1 (i) существует, если выполнены следующие условия:

$$a) \sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{\ln(2+|\lambda|)} < +\infty,$$

где $\mathcal{Z}(\hat{T}) = \{z \in \mathbb{C} : \hat{T}(z) = 0\}$;

б) последовательность кратностей m_λ нулей $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$ удовлетворяет условию $\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{m_\lambda}{\ln(2+|\lambda|)} < +\infty$;

в) для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$ выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^{m_\lambda-1} \left| \frac{1}{j!} \left(\frac{(z-\lambda)^{m_\lambda}}{\hat{T}(z)} \right)^{(j)} \right|_{z=\lambda} \leq (2+|\lambda|)^\gamma,$$

где константа $\gamma > 0$ не зависит от λ .

Отметим, что класс распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющих а)–в), является достаточно широким и содержит многие интересные для приложений распределения (см. [4, часть 3]). Можно также показать, что для любой пары условий из а)–в) существуют распределения из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, для которых выполнены эти два условия и не выполняется третье. Вопрос о необходимости условий а)–в) в теоремах о продолжении для классов $\mathcal{D}'_T$ и C_T^∞ изучался в работе [7]. Было показано, что для любого ненулевого $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ условия а) и б) являются необходимыми для существования продолжения (см. [7, теоремы 3, 4]), а условие в) нельзя убрать без каких-либо дополнительных предположений относительно T (см. [7, теорема 5]). Результаты такого же типа получены и для классов гладких функций типа Жеврея (см. [7, теоремы 2, 3]). Отметим также результат о невозможности непрерывного продолжения непрерывной периодической в среднем функции при условии, что m_λ растет быстрее, чем $|\operatorname{Im} \lambda|$ (см. [7, теорема 6]).

В работах [1, глава 5; 2] установлены некоторые результаты о возможности периодического в среднем продолжения функций классов $C([-r, r])$ и $L^p([-r, r])$ для распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ вида

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-r}^r \varphi(t) d\sigma(t), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \quad (1)$$

где σ – функция ограниченной вариации со скачками в точках $\pm r$. Наличие скачков в точках $\pm r$ у функции σ накладывает ряд ограничений на нули $\hat{T}$. Среди них отметим следующие свойства нулей (см. [1, лемма 5.1.1]), из которых следуют указан-

ные выше условия а)–в) для случаев $C_T^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^1)$ в проблеме 1 (i):

$$(i) \sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} (|\operatorname{Im} \lambda| + m_\lambda) < +\infty;$$

(ii) для любого $\delta > 0$ существует постоянная $c_\delta > 0$, такая, что вне кружков радиуса δ с центрами в точках $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$ выполнено неравенство $|\hat{T}(z)| \geq c_\delta e^{r|\operatorname{Im} z|}$.

Многомерный случай проблемы 1 является более сложным и специфичным. Единственность продолжения, вообще говоря, не имеет места. Это видно уже на примере линейных гиперболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые являются уравнениями свёртки с соответствующим $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, для возможности продолжения требуются дополнительные условия на f (см. [4–7], где получены аналоги указанных выше одномерных результатов для случая $n \geq 2$).

В работе [9] исследовался следующий вопрос: при каких условиях на измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ произвольная функция $f \in L^2(E)$ может быть продолжена до функции класса $(L^2_{\text{loc}} \cap \mathcal{D}'_T)(\mathbb{R}^n)$? Было показано [9, теорема 1], что указанное продолжение возможно, если T имеет вид

$$T(x) = \begin{cases} (r^2 - |x|^2)^s \varphi(|x|^2), & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r, \end{cases} \quad (2)$$

где $r > 0$, $s > -1$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(r^2) \neq 0$, а множество E имеет диаметр, меньший, чем $2r$. Для множеств E с диаметром $2r$ и более данное утверждение, вообще говоря, неверно. Распространение этого результата на другие классы функций и исследование свойств возможных продолжений представляет большой интерес. Сформулируем одну из соответствующих проблем для непрерывного периодического в среднем продолжения.

Проблема 2. (i) Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$ и E – непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. Пусть также $f \in C(E)$. При каких условиях существует $F \in C_T(\mathbb{R}^n)$, совпадающая с f на E ?

(ii) Если такое продолжение F существует, то что можно сказать о его росте на бесконечности?

Известно, что при $n = 1$ в проблеме 2 существует продолжение не выше экспоненциального роста, если $E \subset (-r, r)$ и T имеет вид (1), где σ – функция ограниченной вариации со скачками в точках $\pm r$ (см. [1, теорема 5.1.9]). Для множества $E = [-r, r]$ справедлив аналогичный результат, если продолжаемая функция $f \in C([-r, r])$ удовле-

творяет дополнительному необходимому условию

$$\int_{-r}^r f(t) d\sigma(t) = 0. \quad (3)$$

Можно показать также, что существуют распределение T вида (1) и функция $f \in C^\infty([-r, r])$, удовлетворяющая (3), которая не продолжается даже до распределения класса $\mathcal{D}'_T$ на некотором интервале, содержащем $[-r, r]$ (см. [7, следствие 1]).

В случае произвольной размерности единственным из известных результатов по проблеме 2 является следующая теорема, полученная в [9]: если $E \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное ограниченное множество, содержащее две внутренние точки a, b с расстоянием $2r$ между ними, то существует непрерывная функция f на E , которую нельзя продолжить даже до распределения класса $\mathcal{D}'_T(B)$, где B — произвольный открытый шар с центром в точке $(a + b)/2$, содержащий E .

В данной работе исследуется проблема 2 в случае, когда E является отрезком в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Показано, что, в отличие от результатов работы [9], для широкого класса распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и для непрерывных по Дини функций на E возможно продолжение до функции класса $C_T(\mathbb{R}^n)$ независимо от длины отрезка E (см. теорему 1 ниже). Более того, для некоторых T аналогичный результат справедлив и для любой непрерывной функции на E (см. теорему 2). В теоремах 1 и 2 даются также оценки скорости роста продолжений, которые, как видно из теоремы 3, в общем случае не улучшаемы. Далее показано (см. теоремы 4 и 5), что утверждения теорем 1 и 2 могут не выполняться для некоторых радиальных $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ даже в случае бесконечно дифференцируемых функций на E . Одним из промежуточных результатов работы, представляющих самостоятельный интерес, является теорема 6 о периодическом в среднем продолжении некоторых функций, вещественно аналитических на прямой. Из нее следует, в частности, результат о разрешимости интерполяционной задачи для решений уравнения свёртки с узлами интерполяции, лежащими на произвольном луче в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 7).

ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$ и множество E является отрезком (выпуклой оболочкой двух различных точек) в $\mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности, будем считать, что E имеет вид $E =$

$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: |x_1| \leq l, x_2 = \dots = x_n = 0\}$ для некоторого $l > 0$. Функция $f \in C(E)$ называется непрерывной по Дини на отрезке E , если $\int_0^\alpha \frac{\omega(\delta, f)}{\delta} d\delta < +\infty$ для некоторого $\alpha > 0$, где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f на E .

Для функции $f \in C(E)$ и распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $C_{T,f}(\mathbb{R}^n)$ множество всех функций класса $C_T(\mathbb{R}^n)$, совпадающих с f на E .

Пусть $SO(n)$ — группа вращений $\mathbb{R}^n$. Распределение $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется радиальным, если оно инвариантно относительно группы $SO(n)$, т.е. $\langle T, \varphi(\tau x) \rangle = \langle T, \varphi(x) \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\tau \in SO(n)$. Обозначим через $\mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ множество всех радиальных распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Сферическим преобразованием распределения $T \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ называется четная целая функция

$$\tilde{T}(z) = 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \langle T_x, (z|x|)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(z|x|) \rangle, \quad z \in \mathbb{C},$$

где Γ — гамма-функция, $J_{\frac{n-1}{2}}$ — функция Бесселя первого рода. Обозначим

$$\mathcal{L}(\tilde{T}) = \{z \in \mathbb{C}: \tilde{T}(z) = 0\}.$$

Пусть $a > 0, b \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что распределение $T \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_{a,b}$, если множество $\mathcal{L}(\tilde{T})$ содержит последовательность $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ комплексных чисел, такую что $\lambda_m = am + b + \varepsilon_m$, $m = 1, 2, \dots$, где $\sum_{m=1}^\infty |\varepsilon_m|^2 < +\infty$.

Из теоремы Пэли-Винера для сферического преобразования следует (см. [4, часть 1, теорема 6.5]), что для любой пары (a, b) класс $\mathcal{L}_{a,b}$ является достаточно широким. Принадлежность заданного распределения $T \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ классу $\mathcal{L}_{a,b}$ во многих случаях можно проверить с помощью известных асимптотических формул для $\tilde{T}(z)$ при $z \rightarrow \infty$, см. [10, глава 2, теорема 10.2]. Например, любая функция вида (2) при $-1 < s < \frac{n}{2} - 1$ принадлежит $\mathcal{L}_{a,b}$ для некоторой пары (a, b) . Отметим также, что если $T \in \mathcal{L}_{a,b}$, то $T * W \in \mathcal{L}_{a,b}$ для любого $W \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathcal{E}_{a,b}$ и функция f является непрерывной по Дини на E . Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $q \in \{2, \dots, n\}$ существует $F \in C_{T,f}(\mathbb{R}^n)$, такая что

$$F(x) = O(e^{(|\operatorname{Im} b| + \varepsilon)|x_q|}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Вопрос о том, можно ли в теореме 1 непрерывность по Дини заменить обычной непрерывностью, в общем случае остается открытым. Однако, как видно из следующей теоремы, при $2b/a \in \mathbb{Z}$ ответ положительный.

Теорема 2. Пусть $T \in \mathcal{E}_{a,b}$, $2b/a \in \mathbb{Z}$ и $f \in C(E)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $q \in \{2, \dots, n\}$ существует $F \in C_{T,f}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию

$$F(x) = O(e^{\varepsilon|x_q|}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Следующий результат показывает, что оценки (4) и (5) для функции F в теоремах 1 и 2 в общем случае усилить нельзя.

Теорема 3. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\operatorname{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \geq 0$ и

$$|\operatorname{Im} \lambda| > \gamma \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T}). \quad (6)$$

Тогда для любой ненулевой функции $F \in C_T(\mathbb{R}^n)$ существует $\varepsilon > 0$, такое что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{|F(x)|} e^{-(\gamma + \varepsilon)|x|} = +\infty.$$

В частности, если $T \in \mathcal{E}_{a,b}$ и условие (6) выполнено при $\gamma = |\operatorname{Im} b|$, то оценки (4) и (5) в теоремах 1 и 2 являются неулучшаемыми. Можно показать, что если условие (6) не выполняется, то утверждение теоремы 3 станет неверным.

Обсудим теперь необходимость условия принадлежности распределения T классу $\mathcal{E}_{a,b}$ в теоремах 1 и 2. Для любой $f \in C(E)$ положим

$$f_0(t) = f(t, 0, \dots, 0), \quad t \in [-l, l].$$

Будем говорить, что функция f принадлежит классу $C^k(E)$ при некотором неотрицательном целом k (или $k = \infty$), если $f_0 \in C^k([-l, l])$. Функция f называется квазианалитической на E , если $f \in C^\infty(E)$ и $\sum_{j=1}^{\infty} (\inf_{k \geq j} M_k^{1/k})^{-1} = \infty$, где $M_k = \max_{[-l, l]} |f_0^{(k)}(t)|$. Если при всех целых $k \geq 0$ выполнены неравенства $M_k \leq c^{k+1} (k+1)^k$ с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от k , то говорят, что f является вещественно аналитической на E . Это эквивалентно тому, что f_0 может быть продолжена до голоморфной функции в некоторую комплексную окрестность отрезка $[-l, l]$.

Теорема 4. Пусть U — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, инвариантное относительно вращений, т.е. $\tau U = U$ для любого $\tau \in SO(n)$. Пусть также ψ — положительная строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)/t = 0,$$

$$\psi(t+1) - \psi(t) = O\left(\frac{\psi(t)}{\ln(t+2)}\right), \quad t \in [0, +\infty),$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\psi(t)} < +\infty.$$

Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) Для любой неквазианалитической функции $f \in C(E)$ существует $T \in \mathcal{E}'_{\operatorname{rad}}(\mathbb{R}^n)$, такое что $\operatorname{supp} T = \{0\} \cup \bar{U}$ и $C_{T,f}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$, где $\bar{U}$ — замыкание U в $\mathbb{R}^n$.

(ii) Существуют распределение $T \in \mathcal{E}'_{\operatorname{rad}}(\mathbb{R}^n)$ и вещественно аналитическая на E функция f , такие что $\operatorname{supp} T = \{0\} \cup \bar{U}$ и $C_{T,f}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ и для любой функции $F \in C_{T,f}(\mathbb{R}^n)$ выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{|F(x)|} \exp(-\psi^{-1}(|x|)) = +\infty, \quad (7)$$

где ψ^{-1} — функция, обратная к ψ .

Поскольку ψ растет на бесконечности медленнее, чем линейная функция, условие (7) противоречит каждому из условий (4) и (5).

Отметим, что в теореме 4 не исключается случай, когда $U = \emptyset$ (при этом все перечисленные требования на U считаются выполненными по определению). Более того, в случае $U = \emptyset$ теореме 4 можно усилить следующим образом.

Теорема 5. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\operatorname{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Тогда выполнены утверждения:

(i) Если $\mathcal{Z}(\tilde{T}) = \emptyset$, то $C_{T,f}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ для любой ненулевой $f \in C(E)$.

(ii) Если $\mathcal{Z}(\tilde{T}) \neq \emptyset$, то для любой положительной возрастающей функции ψ на $[0, +\infty)$ существует вещественно аналитическая на E функция f , такая что $C_{T,f}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{|F(x)|} / \psi(|x|) = +\infty$ для любой $F \in C_{T,f}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Существует вещественно аналитическая на E функция f , для которой $C_{T,f}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$.

Таким образом, условие принадлежности распределения $T \in \mathcal{E}'_{\operatorname{rad}}(\mathbb{R}^n)$ классу $\mathcal{E}_{a,b}$ в теоремах 1 и 2 нельзя убрать без дополнительных предположе-

ний на T , даже если потребовать, чтобы f была достаточно гладкой на E .

При доказательстве теорем 4 и 5 используется следующий промежуточный результат данной работы, представляющий самостоятельный интерес.

Теорема 6. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Тогда для любой целой функции $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ существует вещественно аналитическая в $\mathbb{R}^n$ функция F , такая что

$$F * T = 0 \quad (8)$$

и $F(x_1, 0, \dots, 0) = w(e^{x_1})$ при всех $x_1 \in \mathbb{R}$.

Эта теорема, в частности, показывает, что при условии $\mathcal{L}(\tilde{T}) \neq \emptyset$ (которое является необходимым) решения уравнения (8) могут иметь сколь угодно быстрый рост на бесконечности. Одним из приложений теоремы 6 является следующий результат о разрешимости интерполяционной задачи для решений уравнения (8) с узлами интерполяции, лежащими на произвольном луче в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 7. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}(\tilde{T}) \neq \emptyset$ и $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность точек в $\mathbb{R}^n$, принадлежащих некоторому лучу и удовлетворяющих условию $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \infty$. Тогда для любой последовательности b_m комплексных чисел существует вещественно аналитическое в $\mathbb{R}^n$ решение F уравнения (8), такое что $F(a_m) = b_m$ для всех m .

Отметим, что при $\text{supp } T = \{0\}$ из теоремы 7 следует аналогичный результат об интерполяции для решений дифференциальных уравнений вида $p(\Delta)F = 0$, где p — многочлен, отличный от тождественной константы, Δ — оператор Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Седлецкий А.М. // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37 (227). № 5. С. 51–95.
3. Седлецкий А.М. // Дифферен. уравнения. 1991. Т. 27. № 4. С. 703–711.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer, 2003. 454 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London: Springer-Verlag, 2009. 672 p.
6. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013. 592 p.
7. Волчков В.В., Волчков Вит.В. // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 65–96.
8. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. М.: Мир, 1986. 462 с.
9. Зарайский Д.А. // Труды ИПММ. 2017. Т. 31. С. 90–96.
10. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. I. Рига: Зинатне, 1974. 390 с.

CONTINUOUS MEAN PERIODIC EXTENSION OF FUNCTIONS FROM A SEGMENT

V. V. Volchkov^a and Vit. V. Volchkov^a

^a Donetsk National University, Donetsk, Ukraine

Presented by Academician of the RAS S.V. Konyagin

We study the following version of the mean periodic extension problem.

- (i) Suppose that $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ and E is a non-empty closed subset of $\mathbb{R}^n$. What conditions guarantee that for a function $f \in C(E)$ there is a function $F \in C(\mathbb{R}^n)$ coinciding with f on E such that $f * T = 0$ in $\mathbb{R}^n$?
- (ii) If such an extension F exists then estimate the growth of F at infinity.

We present a solution of this problem for a broad class of distributions T in the case when E is a segment in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: convolution equations, mean periodicity, spherical transform, quasi-analyticity