*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 497, с. 7–11*

**МАТЕМАТИКА**

*УДК 519.857*

# СПОСОБ ЗАДАНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ И ГИББСОВСКИХ МЕР И ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД

**© 2021 г. А. М. Вершик[1, 2, 3,*]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 02.02.2021 г.
Поступило 02.02.2021 г.
После доработки 02.02.2021 г.
Принято к публикации 24.02.2021 г.

Сформулирована общая постановка вопроса о задании инвариантных мер с теми или иными свойствами и предложен эргодический метод возмущений для описания некоторых таких мер.

*Ключевые слова:* отношение эквивалентности, коцикл, инвариантные меры, марковские цепи, копереходы

**DOI:** 10.31857/S2686954321020077

## 1. ЗАДАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКТИВНЫХ УСЛОВНЫХ МЕР

Во второй половине прошлого века постепенно выработался новый способ задания вероятностных мер в бесконечномерных системах, альтернативный классическому (колмогоровскому) способу. Вместо системы согласованных конечномерных распределений, которая позволяет определить меру единственным образом с помощью проекций, в новом методе задания предлагается иная система данных, грубо говоря, согласованная система условных мер. Метод возникал независимо в теории марковских процессов (Е.Б. Дынкин), в статфизике (Р.Л. Добрушин) и др. Мы приводим абстрактную версию метода, рассматривая его одновременно как далекое обобщение теории измеримых разбиений пространств Лебега и систем условных мер по Рохлину и как проблему нахождения инвариантных мер в теории динамических систем и гиббсовских мер. Изложение ведется в терминах оснащенных отношений эквивалентности (о.о.э.), или, иначе, борелевских разбиений в стандартном борелевском пространстве и “проективных условных мер” на элементах этих разбиений. Можно было бы также использовать язык теории группоидов или язык теории продолжения мер со специальных алгебр (но не $\sigma$-алгебр) множеств на некоторую (не всю) $\sigma$-алгебру измеримых множеств. Сходные соображения в меньшей общности см. в [8, 11].

Новый метод по существу ввел в обиход большое количество комбинаторных, аналитических и алгебраических задач – о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов, о марковских мерах с данными копереходами и т.д.

Пусть на стандартном борелевском пространстве $(X,\mathfrak{A})$ (изоморфном отрезку [0, 1] как борелевскому пространству) с $\sigma$-алгеброй всех борелевских множеств $\mathfrak{A}$ задано некоторое борелевское отношение эквивалентности (о.э.) $\tau$ (т.е. разбиение) со счетными классами, а также борелевский 2-коцикл $\rho$ с неотрицательными вещественными значениями на этом отношении, т.е. борелевская функция $\rho$ на парах эквивалентных точек, удовлетворяющая условиям $\rho(x, x) = \rho(x,y)\rho(y,x) = 1$, $\rho(x,y)\rho(y,z) = \rho(x,z)$. С помощью коцикла $\rho$ на каждом классе эквивалентности однозначно с точностью до положительного множителя определяется конечная или $\sigma$-конечная неотрицательная мера (коротко – “условная проективная мера”). Назовем пару $(\tau,\rho)$ оснащенным отношением эквивалентности на пространстве $(X,\mathfrak{A})$.[1] Если все классы конечны, то о.о.э. есть не что иное, как борелевски измеримое разбиение, а коцикл определяет условные вероятностные меры на всех классах.

[1]*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
[2]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
[3]*Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: avershik@gmail.com*

[1] Естественно было бы, продолжая терминологию Рохлина, ввести термин “полуизмеримое разбиение с системой условных проективных мер”.

С другой стороны, хорошо известно, что если имеется некоторая вероятностная мера $\mu$ на $X$ (т.е. на пространстве Лебега), а $\tau$ – о.э., то мера $\mu$ однозначно определяет оснащение этого о.э., т.е. 2-коцикл, или условную проективную меру, на почти каждом классе эквивалентности; в случае конечного о.э. это и есть рохлинские условные меры на элементах разбиения. В случае, когда о.э. есть разбиение на траектории действия счетной группы с квазиинвариантной мерой, этот коцикл есть так называемый коцикл Радона–Никодима $RN_\mu$. Если коцикл тождественно равен единице, то мера называется инвариантной. В тех случаях, когда коцикл не указан, предполагается, что он тождественно равен единице. Сформулируем основную задачу.

З а д а ч а 1. Пусть задано о.о.э. $(\tau, \rho)$ на стандартном борелевском пространстве $(X, \mathfrak{A})$; найти все борелевские вероятностные меры $\mu$, у которых коцикл Радона–Никодима $RN_\mu$ совпадает с коциклом $\rho$ почти всюду по мере $\mu$, или, иначе, найти все вероятностные меры с данными условными проективными мерами на классах эквивалентности.

В том случае, когда такая мера единственна (именно этот случай отвечает колмогоровской системе конечномерных распределений), мы можем говорить о продолжении меры на $\sigma$-алгебру всех измеримых множеств; в общем случае единственности может не быть.

Совокупность всех мер на $(X, \mathfrak{A})$, задаваемых задачей 1, корректно определена и естественным образом образует симплекс Шоке. Множество его крайних точек (граница Шоке) называется абсолютом о.о.э. $(\tau, \rho)$ и обозначается $\mathrm{Ab}(X, \tau, \rho)$. Любые две различные меры из $\mathrm{Ab}(X, \tau, \rho)$ взаимно сингулярны и корректно определены на различных полных $\sigma$-алгебрах.

Традиционное построение гиббсовских мер, как и задача об инвариантных мерах действий групп в динамике, очевидным образом укладывается в описанную схему. Понятие абсолюта тесно связано с различными понятиями границ.

Если все классы о.о.э. конечны, то определено борелевское фактор-пространство $X/\tau$, которое совпадает с $\mathrm{Ab}(X, \tau, \rho)$, и описание всех (не эргодических) мер из $\mathcal{M}_{(\tau,\rho)}$ сводится к указанию меры на этом фактор-пространстве. Если же о.э. не определяет борелевского фактор-пространства (пространства классов), то изучение структуры абсолюта представляет серьезную проблему и существенно зависит от геометрии классов. Решение задачи 1 может быть "диким", т.е. абсолют может не иметь разумной параметризации, но во многих задачах, например комбинаторных, параметризация может быть предъявлена.

Нетрудно дословно обобщить все эти определения на такие о.э. $\tau$, у которых классы эквивалентности не счетны, но снабжены корректно определенной локально компактной топологией.

Важно подчеркнуть, что изучение о.э. возможно только вместе с коциклом, т.е. с системой условных проективных мер (даже если коцикл тождественно равен 1). Главную роль в дальнейшем изучении предмета (единственность, конкретные свойства мер и т.д.) должна играть геометрия классов о.о.э., но она пока еще плохо изучена.

Сформулируем теперь обратную задачу.

З а д а ч а 2. Рассматривается некоторое семейство вероятностных мер $M$, заданных на $\sigma$-алгебре $\mathfrak{A}$ стандартного борелевского пространства $X$. Найти наименьшее о.э. $\tau$, для которого все меры $\mu \in M$ задают один и тот же коцикл $\rho \equiv RN_\mu$.

Эта задача есть обобщение традиционной задачи о достаточных статистиках (ср. [7]), в которой обычно ищутся лишь измеримые (например, конечные) отношения эквивалентности. В приведенной постановке никаких ограничений на о.э. нет. Пусть, например, рассматривается множество всех мер Бернулли $\prod_1^\infty (p, 1-p)$, $p \in [0,1]$, в пространстве последовательностей $\prod_1^\infty \{0;1\}$. Искомое о.о.э. есть разбиение де Финетти с единичным коциклом: две последовательности эквивалентны, если они совпадают с некоторого места $n$ и имеют одинаковое число нулей среди первых $n$ координат.

## 2. ГИПЕРКОНЕЧНЫЕ И РУЧНЫЕ ОСНАЩЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, УНИВЕРСАЛЬНАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим сформулированную выше задачу 1 для специального случая, важность которого определяется большим количеством приложений. А именно, эта задача включает в себя задачу об описании характеров локально конечных групп или, более общо, об описании следов на AF-алгебрах, а также задачу о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов.

Оснащенное отношение эквивалентности $\tau$ называется гиперконечным, если оно является монотонно возрастающим пределом последовательности конечных отношений эквивалентности: $\tau = \bigcup_n \xi_n$. Таким образом, гиперконечные о.о.э. можно задавать последовательностями их конечных аппроксимаций, т.е. убывающими последовательностями измеримых разбиений $\{\xi_n\}_n$ с конечными элементами и условными мерами на них. Такие последовательности называются фильтрациями. Подробности см. в [2].

В силу ряда известных теорем траекторное разбиение для действия группы с инвариантной мерой гиперконечно тогда и только тогда, когда группа аменабельна. Однако траекторные разбиения с неединичным коциклом могут быть гиперконечными и для неаменабельных групп. Заметим, что условие гиперконечности о.о.э. есть условие на коцикл, т.е. на условные проективные меры, но как будто в таком виде оно не формулировалось. Для пространств Лебега гиперконечное о.о.э. единственно с точностью до изоморфизма (обобщенная теорема Г. Дая).

Мы накладываем чуть более сильное, чем гиперконечность, условие на аппроксимирующую последовательность измеримых разбиений $\{\xi_n\}$: о.э. называется ручным, или локально гиперконечным, если для каждого $n$ число типов условных мер разбиения $i_n$ конечно. Это условие определяет наиболее интересные для приложений гиперконечные о.э. Опишем универсальную модель ручного о.о.э.

Определение 1. Пусть $X_n$ – конечное или компактное пространство и задано множество "операторов перехода" $\{\pi_n\}$, сопоставляющих точке $x \in X_n$ подмножество $\pi_n(x) \subset X_{n+1}$. Марковским (нестационарным) компактом Mar называется пространство последовательностей

$$\mathrm{Mar} \subset \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon x_n \in X_n, n = 1, 2, \ldots\},$$

где $\{x_n\} \in \mathrm{Mar} \Leftrightarrow x_{n+1} \in \pi_n(x_n)$ для любого $n \geq 1$.

Элементы компакта Mar мы называем траекториями, или путями. Хвостовым отношением эквивалентности $\tau$ в марковском компакте Mar называется следующее отношение на траекториях:

$$\{x_n\} \sim_\tau \{y_n\} \Leftrightarrow \text{существует такое } N, \text{ что } x_n = y_n \text{ для любого } n > N.$$

Марковский компакт Mar снабжается слабой топологией и борелевской структурой. Определено понятие марковской борелевской меры $P$, которая задается начальным распределением $\mu_1(\cdot)$ координаты $x_1$ и набором переходных вероятностей, т.е. семейством мер $\{P_{n,x}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X_n$, где $P_{n,x}(y) = \mathrm{Prob}(x_{n+1} = y | x_n = x)$.

Но нам понадобится другая совокупность данных на марковском компакте – система копереходных вероятностей. Это семейство мер $\{P^{n,x}\}$ на $X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X_{n+1}$, где $P^{n,x}(y) = \mathrm{Prob}(x_n = y | x_{n+1} = x)$. Такая система еще не определяет глобальной меры на всем марковском компакте.

Лемма 1. *Всякая система копереходных мер определяет коцикл на хвостовом о.э. марковского компакта: отношение условных мер двух путей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$, *совпадающих при* $n > N$, *равно отношению произведений соответствующих копереходных вероятностей*

$$\prod_{1 \leq i \leq N} \frac{\mathrm{Prob}(x_i | x_{i+1})}{\mathrm{Prob}(y_i | y_{i+1})}.$$

Назовем такие коциклы марковскими, а марковский компакт, снабженный марковским коциклом, т.е. системой копереходов, назовем оснащенным марковским компактом.

Очевидно, что всякая марковская мера на Mar однозначно определяет марковский коцикл, но, вообще говоря, система копереходов, т.е. марковский коцикл не определяет однозначно марковскую меру. Столь же ясно, что на марковском компакте могут существовать коциклы, не являющиеся марковскими.

Теорема 1 (универсальная модель). *Для всякого стандартного борелевского пространства* $X$ *и заданного в нем ручного оснащенного отношения эквивалентности* $\tau$ *с коциклом* $\rho$ *существует оснащенный марковский компакт* Mar *и борелевский изоморфизм* $T\colon X \to \mathrm{Mar}$, *такой, что* $T$ *отображает о.о.э.* $\tau$ *в хвостовое о.э. на* Mar, *а коцикл* $\rho$ – *в марковский коцикл.*

*Таким образом, задача 1 об инвариантных мерах для ручных о.о.э. сводится к задаче о поиске всех марковских вероятностных мер $P$ на некотором компакте Mar с заданной системой копереходных вероятностей. Иначе говоря, к описанию марковских цепей с заданными копереходами.*

Если коцикл равен единице, т.е. все условные меры всех порядков равномерны, то мы получаем задачу об описании всех мер с максимальной энтропией на заданном марковском компакте.

Абсолют марковского компакта Mar обозначается через Ab(Mar). Доказательство теоремы фактически вытекает из результатов работы [2].

Вместо языка марковских компактов можно использовать язык $\mathbb{N}$-градуированных графов (диаграмм Браттели) – пространство путей в таком графе есть марковский компакт, что полностью определяет параллелизм изложений. Во многих ситуациях (в основном комбинаторных) язык графов предпочтительней. Модели, аналогичные марковской модели, для общих о.о.э. автору неизвестны.

## 3. ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Под эргодическим методом решения задачи 1 об инвариантных мерах для гиперконечных отношений эквивалентности понимается метод отыскания инвариантных распределений и инвариантных мер, основанный на индивидуальной эргодической теореме или, точнее, на индивидуальной теореме о сходимости мартингалов, применяемой к характеристическим функциям множеств из некоторого базиса $\sigma$-алгебры, на которой задана искомая мера. В таком понимании этот термин использован в работе автора [1] и в более ранних работах (см., например, [6]). Но практическое нахождение инвариантных мер, т.е. вероятностей цилиндров, или переходных вероятностей, как пределов некоторых условных ожиданий может быть весьма непростым. Очень существен выбор базиса множеств, меры которых вычисляются. Но, с другой стороны, сама проблема отыскания всех эргодических мер может быть "дикой", и потому вычисления по существу не могут быть реализуемыми в полном объеме. Разумная классификация гиперконечных абсолютов (т.е. систем условных проективных мер) вряд ли возможна; в то же время борелевская классификация о.о.э., наоборот, слишком груба (см. [8]); другие, промежуточные критерии классификации автору неизвестны. Поэтому важно иметь доступные критерии разрешимости задачи об инвариантных мерах, а также способы редукции задач к некоторым каноническим задачам.

Одна из таких фундаментальных задач, решение которой получено с помощью канонического применения эргодического метода, — это задача об описании всех эргодических мер в бесконечном произведении $X^\infty = \prod_1^\infty X$ (где $X$ — некоторое борелевское пространство), инвариантных относительно группы $S_\infty$ всех конечных подстановок координат. Обозначим через $\tau^F$ о.э. в $X^\infty$, порожденное разбиением на траектории действия группы $S_\infty$. Ответ в задаче 1 дается теоремой де Финетти, и состоит он в том, что всякая эргодическая, инвариантная мера есть бернуллиевская мера с произвольным одномерным распределением (= мерой на $X$). Таким образом, $\mathrm{Ab}(X^\infty, \tau^F) = \mathrm{Meas}(X)$.

Если рассматривать этот ответ с точностью до метрического изоморфизма, то окажется, что абсолют состоит из единственной чисто непрерывной меры на $X$, континуума дискретных мер и их смесей, т.е. $\mathrm{Ab}(X^\infty, \tau^F) = \left\{\{\alpha_n\}: \alpha_n \geq 0, \sum_n \alpha_n \leq 1\right\}$.

Во многих недавних примерах задач о нахождении абсолюта в комбинаторных и алгебраических ситуациях ответ (предположительно или на самом деле) имеет сходную структуру: абсолют есть симплекс Шоке (его можно назвать вторичным симплексом), т.е. и сами эргодические меры также допускают разложение. Поэтому естественно предположить, что доказательство этого факта следует искать не прямым вычислением, а изучая редукцию к описаннойвыше фундаментальной задаче де Финетти. Мы предлагаем следующий способ, который можно назвать методом возмущений. В качестве невозмущенной задачи возьмем задачу де Финетти о $\tau^F$. Первый этап состоит в построении такого гомоморфизма $T$ пространства, в котором поставлена задача об абсолюте для некоторого о.э. $\tau$, в пространство $X^\infty$, что $T(\tau)$ является подразбиением о.э. $\tau^F$. На втором этапе требуется проверить, что абсолют о.э. $T(\tau)$ подобен или даже совпадает с абсолютом о.э. $\tau^F$. Нахождение гомоморфизма $T$, если он существует, есть наиболее нетривиальная часть метода.

Второй этап связан с проблемой, относящейся к бесконечному произведению $X^\infty$, которая интересна сама по себе.

З а д а ч а 3. Для каких о.э. $\tau$, удовлетворяющих условию $\tau \succ \tau^F$, абсолют $\mathrm{Ab}(X^\infty, \tau)$ состоит из всех бернуллиевских мер?

Следующий частичный ответ оказывается полезным.

Л е м м а 2. *Пусть на борелевском пространстве $X$ задано два о.о.э. $\tau$, $\tau'$ с единичными коциклами, причем имеет место включение абсолютов* $\mathrm{Ab}(X, \tau') \subset Ab(X, \tau)$. *Совпадение этих абсолютов равносильно следующему условию*: *для всякой эргодической меры* $\mu \in \mathrm{Ab}(X, \tau')$ *о.о.э* $\tau$ *эргодично относительно* $\mu$.

В свою очередь, доказательство эргодичности, т.е. совпадения абсолютов, сводится к проверке стремления некоторой последовательности функционалов к константе по мере, а не к более сложной задаче нахождения слабых пределов, как в общей схеме эргодического метода.

Показательный пример пользы метода возмущений дает задача о центральных мерах графа Юнга. Теорема Тома о характерах, точнее, ее пересказ как утверждения об абсолюте графа Юнга, не оставляет сомнений в том, что эта задача должна рассматриваться в связи с теоремой де Финетти. Дело в том, что ответы в них удивительно похожи. А именно, абсолют стратифицирован: страта дискретных мер, параметризованных одномерными частотами, сумма которых равна единице, и страта мер с нулевыми частотами. Однако все известные до сих пор доказательства (см. об этом [3]) не элементарны и не вскрывают близости этих задач. Эта связь действительно нетривиальна, и основную роль в ее объяснении играют динамические свойства алгоритма RSK, который и позволяет построить нужное поднятие графа $Q$-таблиц до графа Шура—Вейля.

Использование $Q$-таблиц алгоритма RSK для накрытия бернуллиевскими мерами центральных мер для графа Юнга было впервые рассмотрено в [9], изоморфизм этого соответствия доказан в [10]. Но вложение, о котором сказано выше, не было замечено; в то же время внимательный анализ показывает, что метод возмущений позволяет доказать и саму теорему об абсолюте, т.е. доказать, что таким образом получаются все эргодические центральные меры. Для конечнострочечных таблиц Юнга этот результат неявно содержится в работе [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вершик А.М.* Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп // ДАН СССР. 1974. Т. 218. № 4. С. 749–752.
2. *Вершик А.М.* Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость // Успехи мат. наук. 2017. Т. 72. Вып. 2 (434). С. 67–146.
3. *Вершик А.М.* Три теоремы о единственности меры Планшереля с разных позиций // Тр. МИАН. 2019. Т. 305. С. 71–85.
4. *Вершик А.М.* Асимптотика разбиения куба на симплексы Вейля // Функц. анал. и прил. 2019. Т. 53. Вып. 2. С. 11–31.
5. *Вершик А.М, Цилевич Н.В.* Эргодичность и тотальность разбиений, связанных с алгоритмом RSK // Функц. анал. и прил. 2021. Т. 55. Вып. 1. С. 33–42.
6. *Линник Ю.В.* Эргодические свойства алгебраических полей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
7. *Diaconis P., Freedman D.* Partial exchangeability and sufficiency / In: Statistics: Applications and New Directions. Calcutta: Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981. P. 205–236.
8. *Dougherty R., Jackson S., Kechris A.* The structure of hyperfinite Borel equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 341. № 1. P. 193–225.
9. *Kerov S.V., Vershik A.M.* The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. V. 7. № 1. P. 116–124.
10. *Romik D., Sniady P.* Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles // Ann. Probab. 2015. V. 43. № 2. P. 682–737.
11. *Schmidt K.* Invariant measures for certain expansive $Z^2$-actions // Israel J. Math. 1995. V. 90. P. 295–300.

# A METHOD OF DEFINING CENTRAL AND GIBBS MEASURES AND THE ERGODIC METHOD

**A. M. Vershik**[a,b,c]

[a] *St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, Saint Petersburg, Russian Federation*

[b] *St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation*

[c] *Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We formulate a general statement of the problem of defining invariant measures with certain properties and suggest an ergodic method of perturbations for describing such measures.

*Keywords:* equivalence relation, cocycle, invariant measures, Markov chains, cotransitions