

УДК 519.6

ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

© 2021 г. Т. В. Яковлева^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым 13.10.2020 г.

Поступило 14.10.2020 г.

После доработки 14.10.2020 г.

Принято к публикации 13.02.2021 г.

Проведено теоретическое исследование статистического распределения фазы квазигармонического сигнала. Впервые получено аналитическое выражение для функции плотности вероятности этого распределения, показано, что распределение фазы квазигармонического сигнала является двухпараметрическим и определяется следующими параметрами: отношением сигнала к шуму и величиной отклонения текущего значения фазы от значения фазы исходного, незашумленного сигнала. Проанализирована зависимость функции плотности вероятности фазы квазигармонического сигнала от определяющих ее параметров. Данное исследование является значимым для решения задач высокоточных фазовых измерений методами статистической обработки данных.

Ключевые слова: квазигармонический сигнал, гауссовский шум, функция плотноствероятности

DOI: 10.31857/S2686954321020089

Задача высокоточного измерения фазы сигнала является предметом научных исследований в течение десятилетий [1–4]. Достижение высокой точности фазовых измерений является важным для решения широкого круга научных и прикладных задач, причем во многих задачах фазовые характеристики сигнала по своей информативности являются более значимыми, чем амплитудные, см., например, [5].

Эффективным инструментом обработки стохастических данных при решении задач прикладной математики и теоретической информатики являются методы статистического анализа исследуемых данных. В этой связи актуальной становится задача изучения свойств статистического распределения анализируемой величины. В работе впервые проводится теоретическое исследование особенностей статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, который формируется исходно гармоническим сигналом под воздействием неизбежного гауссовского шума.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи уточним используемые понятия. Как известно, модель гармонического, синусоидального сигнала с постоянной амплитудой эффективно используется в теории. На практике же неизбежное воздей-

ствие шума на процесс распространения любого исходно гармонического сигнала приводит к случайным флуктуациям величины амплитуды и фазы такого сигнала. В результате образуется так называемый квазигармонический сигнал, амплитуда и фаза которого представляют собой случайные величины. В каждый момент времени t такой сигнал может быть представлен в следующей форме:

$$x(t) = R(t) \sin(\omega t + \varphi(t)), \quad (1)$$

где ω – частота, $R(t)$ – амплитуда, или огибающая сигнала, которая изменяется случайным образом под воздействием гауссовского шума, величина фазы $\varphi(t)$ также изменяется во времени случайным образом под воздействием шума в силу амплитудно-фазовой модуляции. Рассмотрим сигнал (1) в комплексной плоскости, как комплексную величину, обозначив ее $S(t)$:

$$S(t) = R(t) \exp[i(\omega t + \varphi(t))] = s(t) \exp(i\omega t). \quad (2)$$

Для изучения фазовых характеристик сигналов мы будем анализировать “медленную” составляющую сигнала, т.е. функцию $s(t) = R(t) \exp[i\varphi(t)]$. Обозначим “медленную” составляющую исходного гармонического, не искаженного шумом комплексного сигнала как вектор $\mathbf{A}(A, \varphi_0)$, характеризуемый постоянными величинами амплитуды A и фазы φ_0 . Распространение сигнала по какой-либо среде неизбежно сопровождается тем, что действительная $A \cos \varphi_0$ и мнимая $A \sin \varphi_0$ составляющие исходного сигнала независимо изменяются под воздействием большого числа случайных шумовых составляющих. Обозначим как $\mathbf{r}(r, \psi)$ суммарный вектор шума, который наклад-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: tan-ya@bk.ru

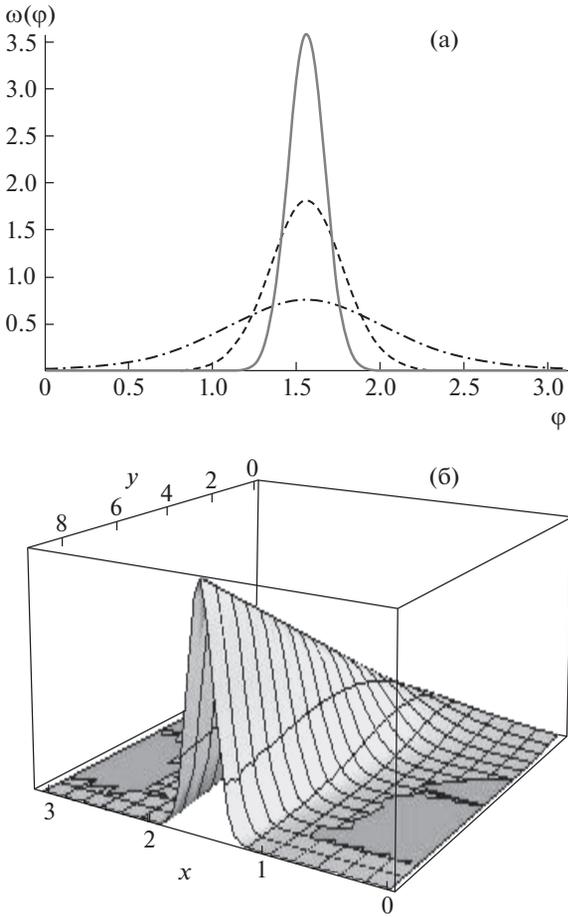


Рис. 1. Графики функции плотности вероятности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала для следующих значений параметров φ_0 и S : а – $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $S = 1, 5, 9$ (штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии соответственно); б – $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

дывается на исходный сигнал \mathbf{A} , искажая его. Компоненты r_x, r_y вектора шума \mathbf{r} являются независимыми случайными величинами и подчиняются нормальному распределению: $\overline{r_x} = \overline{r_y} = 0, \overline{r_x^2} = \overline{r_y^2} = \sigma^2$, где величина σ^2 представляет собой дисперсию шума. Очевидно, что амплитуда r шумового вектора и его фаза ψ представляют собой независимые случайные величины и распределены следующим образом: случайная величина амплитуды r подчиняется статистическому распределению Рэлея, в то время как фаза ψ шумовой компоненты распределена равномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

2. РАСЧЕТ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Обозначим как вектор $\mathbf{R}(R, \varphi)$ “медленную” составляющую результирующего квазигармонического

го сигнала, формируемого суммированием исходного гармонического сигнала \mathbf{A} и шума \mathbf{r} : $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{r}$. Нетрудно показать, что совместная функция распределения случайных величин амплитуды R и фазы φ результирующего сигнала \mathbf{R} определяется выражением [6]

$$W(R, \varphi) dR d\varphi = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 + R^2 - 2AR\cos(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2}\right\} R dR d\varphi. \quad (3)$$

Из (3) следует, что распределения амплитуды R и фазы φ результирующего сигнала не являются независимыми, причем фаза φ результирующего сигнала, в отличие от фазы ψ шумовой составляющей, уже не является равномерно распределенной величиной.

Для определения функции плотности вероятности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала проинтегрируем выражение (3) по R в пределах от нуля до бесконечности. В результате вычислений получаем

$$\omega_\varphi(\varphi) d\varphi = d\varphi \int_0^\infty W(R, \varphi) dR = e^{-A^2/2\sigma^2} \left[1 + \sqrt{\pi}\eta e^\eta (1 + \Phi(\eta))\right] \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (4)$$

где используются следующие обозначения: $\eta = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \cos(\varphi - \varphi_0)$, а функция $\Phi(\eta)$ представляет собой известную специальную функцию, называемую интегралом ошибок: $\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt$.

Формула (4) характеризует распределение фазы случайного сигнала, полученного в результате воздействия гауссовского шума с дисперсией σ^2 на исходно детерминированный сигнал \mathbf{A} с амплитудой A и фазой φ_0 . Нетрудно видеть, что в предельном случае отсутствия детерминированной составляющей, т.е. при $A = 0$, ожидаемо получаем равномерное распределение фазы сигнала:

$$\omega_\varphi(\varphi) d\varphi|_{A=0} = \frac{1}{2\pi} d\varphi.$$

Введем обозначение $S = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}$. Величину $S^2 = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ часто используют в качестве характеристики отношения сигнала к шуму. С учетом введенного параметра S выражение для выше введенного параметра η имеет вид $\eta = S \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Из вышеизложенного следует, что статистическое распределение фазы, описываемое выражением (4), определяется двумя параметрами задачи: отношением сигнала к шуму S и величиной отклонения текущего значения фазы φ от значения фазы φ_0 исходного сигнала, и является чет-

ной функцией этого отклонения, что вполне ожидаемо. Для функции плотности вероятности распределения фазы будем использовать обозначение $\omega_\varphi(\varphi|S, \varphi_0)$:

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(\varphi|S, \varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \eta e^{\eta^2} [1 + \Phi(\eta)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} S \cos(\varphi - \varphi_0) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{S^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)} [1 + \Phi(S \cos(\varphi - \varphi_0))] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

На рис. 1 представлены графики функции плотности вероятности распределения фазы квазигармонического сигнала в зависимости от значения параметра отношения сигнала к шуму S (рис. 1а), а также трехмерный график этой функции (рис. 1б). На рис. 1б по оси x отложена величина фазы, вдоль оси y отложена величина отношения сигнала к шуму.

Как следует из представленных графических данных, с ростом величины отношения сигнала к шуму функция плотности вероятности фазы сигнала заметно сужается, что вполне ожидаемо, учитывая, что в предельном случае очень малой величины отношения сигнала к шуму мы имеем сигнал, состоящий практически из шумовой составляющей, с функцией плотности вероятности, близкой к равномерной, в то время как при большой величине отношения сигнала к шуму мы имеем практически детерминированный сигнал, функция плотности вероятности которого близка к δ -функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически исследуется статистическое распределение величины фазы квазигармонического сигнала, впервые получено аналитическое

выражение для функции плотности вероятности распределения фазы. Показано, что данное распределение является двухпараметрическим и определяется следующими параметрами: величиной отношения сигнала к шуму и величиной отклонения фазы от ее значения, соответствующего исходно детерминированному, незашумленному сигналу.

Полученные в работе результаты вносят вклад в развитие теории вероятностей и могут эффективно использоваться при решении различных научных и прикладных задач, связанных с высокоточными измерениями фазы квазигармонического сигнала, в частности, в таких областях науки и техники, как радиофизика, оптика, радиолокация, радионавигация, метрология.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Electrical Measurement, Signal Processing, and Displays. Ed. J.G. Webster. Boca Raton: CRC Press, 2004. 723 p.
2. Daryanoosh Sh., Slussarenko S., Berry D.W., Howard M. Wiseman, Geoff J. Pryde. Experimental optical phase measurement approaching the exact Heisenberg limit // Nature Communications. 2018. V. 9. 4606.
3. Baoqiang Dua, Songlin Lia, et al. High-precision frequency measurement system based on different frequency quantization phase comparison // Measurement. July 2018. V. 122. P. 220–223.
4. Яковлева Т.В. Свойство устойчивости статистического распределения Райса: теория и применение в задачах измерения фазового сдвига сигналов // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 3. С. 475–485.
5. Зельдович Б.Я., Шкунов В.В., Яковлева Т.В. Теория восстановления толстослойных голограмм спекл-полей // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. № 8. С. 1581–1586.
6. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 494 с.

PECULIARITIES OF THE STATISTICAL DISTRIBUTION OF A QUASI-HARMONIC SIGNAL'S PHASE

T. V. Yakovleva^a

^a Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

A theoretical investigation of the statistical distribution of phase has been implemented. An analytical expression for the probability density function of such a distribution has been first obtained, and the quasi-harmonic signal's phase distribution has been shown to be a two-parameter one and to be determined by the following parameters: the signal-to-noise ratio and the deviation of the current phase value from the initial noiseless signal's phase value. The dependence of the probability density function for the quasi-harmonic signal's phase upon its parameters has been analyzed. This research is a meaningful for solving the tasks of high-precision phase measurements by means of the statistical data processing.

Keywords: quasi-harmonic signal, Gaussian noise, the probability density function