*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 5–9*

## МАТЕМАТИКА

*УДК 517.538.2+517.518.3+517.984.26+517.547.2*

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНТЕЗИРУЕМЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА

**© 2021 г. Н. Ф. Абузярова[1,*]**

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 16.12.2020 г.
Поступило 16.12.2020 г.
После доработки 27.04.2021 г.
Принято к публикации 28.04.2021 г.

Рассматривается инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство $W$ в пространстве Шварца $C^\infty(a;b)$, допускающее слабый спектральный синтез. Нами получены условия, при которых $W$ представляется в виде прямой (алгебраической и топологической) суммы своего резидуального подпространства и замкнутого подпространства, порожденного содержащимися в $W$ экспоненциальными одночленами.

*Ключевые слова:* спектральный синтез, инвариантные подпространства, медленно убывающая функция, плотность Берлинга–Мальявена

**DOI:** 10.31857/S2686954321030024

1. Пусть $\mathscr{E}(a;b) := C^\infty(a;b)$ — пространство Шварца, наделенное метризуемой топологией проективного предела банаховых пространств $C^k[a_k; b_k]$, где $[a_1;b_1] \Subset [a_2;b_2] \Subset \ldots$ — последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a;b)$ вещественной прямой. Известно, что $\mathscr{E}(a;b)$ — пространство Фреше.

Обозначим через $W$ замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ (короче, $D$-инвариантное) подпространство пространства $\mathscr{E}(a;b)$. Резидуальный промежуток $I_W$ подпространства $W$ определяется как минимальный из всех относительно замкнутых в $(a;b)$ непустых промежутков $I$ со свойством $W_I \subset W$, где

$$W_I = \{f \in \mathscr{E}\colon f^{(k)}(t) = 0,\ t \in I,\ k = 0,1,2,\ldots\}. \qquad (1)$$

Существование $I_W$ впервые было установлено в [1, теорема 4.1]; этот факт также нетрудно вывести из общей двойственной схемы, примененной нами при исследовании задачи спектрального синтеза для оператора $D$ в $\mathscr{E}(a;b)$ [2].

Пусть $\Lambda$ — последовательность кратных точек комплексной плоскости с единственной предельной точкой в бесконечности и $\mathscr{E}xp(\Lambda)$ — последовательность экспоненциальных одночленов, построенная по множеству показателей $(-i\Lambda)$ (точке $\lambda \in \Lambda$, которая встречается в этой последовательности $k$ раз, соответствует набор функций $e^{-i\lambda t}$, $te^{-i\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{-i\lambda t}$). Обозначим символом $D_{BM}(\Lambda)$ плотность Берлинга–Мальявена последовательности $\Lambda$ (см., например, [3, IX.D.2]). Согласно хорошо известной теореме Берлинга–Мальявена о радиусе полноты ([3, X.B.3]), если $D_{BM}(\Lambda) < \frac{b-a}{2\pi}$, то в $\mathscr{E}(a;b)$ имеются нетривиальные $D$-инвариантные подпространства $W$, для которых спектр сужения оператора дифференцирования $D: W \to W$ дискретен и равен $(-i\Lambda)$, а запас всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в $W$, есть, соответственно, $\mathscr{E}xp(\Lambda)$. При этом $|I_W| \geq 2\pi D_{BM}(\Lambda)$, где $|I_W|$ — длина резидуального промежутка $I_W$.

Задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования $D$ в пространстве $\mathscr{E}(a;b)$ (см. [1]): выяснить, допускает ли заданное нетривиальное $D$-инвариантное подпространство $W$ с дискретным спектром $(-i\Lambda)$ представление

$$W = \overline{\operatorname{span}\mathscr{E}xp(\Lambda) + W_{I_W}}\,? \qquad (2)$$

[1] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
**E-mail: abnatf@gmail.com*

Это представление обобщает возможность спектрального синтеза в классическом смысле: $W = \overline{\mathrm{span}\,\mathscr{E}xp(\Lambda)}$. Оно было предложено авторами работы [1] из-за наличия в пространстве $\mathscr{E}(a;b)$ нетривиальных $D$-инвариантных подпространств вида (1), спектр которых пуст.

Исследования возможности спектрального синтеза в слабом смысле (2) привели к следующим результатам.

Теорема A [2, следствие 2, замечание 3; 4, теоремы 1.1, 1.2]. *Пусть $W$ — $D$-инвариантное подпространство с дискретным спектром* $(-i\Lambda)$ *и резидуальным промежутком* $I_W$.

1) *Если* $|I_W| > 2\pi D_{BM}(\Lambda)$, *то* $W$ *допускает слабый спектральный синтез, т.е. имеет вид* (2).

2) *Если* $|I_W| < 2\pi D_{BM}(\Lambda)$, *то* $W = \mathscr{E}(a;b)$.

3) *Среди $D$-инвариантных подпространств с дискретным спектром* $(-i\Lambda)$ *и резидуальным промежутком* $I_W$ *длины* $2\pi D_{BM}(\Lambda)$ *имеются как подпространства, допускающие слабый спектральный синтез* (2), *так и подпространства, не допускающие представления* (2).

Из теоремы A следует, что $D$-инвариантное подпространство $W$ с конечным спектром допускает слабый спектральный синтез (2), более того, в этом случае $W$ есть прямая сумма (алгебраическая и топологическая) замкнутых подпространств $\mathrm{span}\,\mathscr{E}xp(\Lambda)$ и $W_{I_W}$:

$$W = \mathrm{span}\,\mathscr{E}xp(\Lambda) \oplus W_{I_W} \tag{3}$$

(см. [1, предложение 6.1]).

В настоящей работе мы изучаем условия, при которых представление в виде прямой суммы (алгебраической и топологической):

$$W = \overline{\mathrm{span}\,\mathscr{E}xp(\Lambda)} \oplus W_{I_W}? \tag{4}$$

справедливо для $D$-инвариантного подпространства вида (2) с бесконечным спектром.

2. Алгебра Шварца $\mathscr{P}$ определяется как образ сильного сопряженного $\mathscr{E}'$ к пространству $\mathscr{E} = C^\infty(\mathbb{R})$ при преобразовании Фурье–Лапласа

$$\mathscr{P} = \mathscr{F}(\mathscr{E}'), \quad \mathscr{F}(S) = S(e^{-itz}), \quad S \in \mathscr{E}'.$$

С топологией и линейной структурой, индуцированными из $\mathscr{E}'$, алгебра $\mathscr{P}$ может быть внутренне описана как индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, где каждое пространство $P_k$ есть совокупность всех целых функций $\varphi$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k e^{k|\mathrm{Im}\,z|}}.$$

Функция $\psi \in \mathscr{P}$ называется медленно убывающей (slowly decreasing function), если существует $a > 0$, такое, что

$$\begin{gathered}\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R}\colon\ |x - x'| \le a\ln(2 + |x|),\\ |\psi(x')| \ge (a + |x'|)^{-a}.\end{gathered} \tag{5}$$

Медленное убывание $\psi \in \mathscr{P}$ равносильно тому, что главный идеал, алгебраически порожденный этой функцией в $\mathscr{P}$, замкнут (см. [5, 6]).

Пусть, как и выше, $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — комплексная последовательность с единственной предельной точкой в бесконечности, причем $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$. Это условие, согласно цитированной в предыдущем пункте теореме о радиусе полноты, эквивалентно существованию в алгебре $\mathscr{P}$ ненулевой функции $\varphi$, обращающейся в нуль на $\Lambda$. Для последовательности $\Lambda$ введем новую характеристику $D_{sd}(\Lambda)$.

Полагаем $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$, если $\Lambda$ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции $\varphi \in \mathscr{P}$. В противном случае, $D_{sd}(\Lambda)$ определяется как инфимум множества всех положительных чисел $a$, таких, что в алгебре $\mathscr{P}$ имеется медленно убывающая функция $\varphi$ экспоненциального типа $\pi a$, равная нулю на $\Lambda$.

Из самого определения величины $D_{sd}(\Lambda)$ следует, что всегда $D_{BM}(\Lambda) \le D_{sd}(\Lambda)$. При этом неравенство может быть и строгим. Более того, возможна ситуация, когда для последовательности $\Lambda$ выполнены соотношения $D_{BM}(\Lambda) = 0$ и $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$. Рассмотрим соответствующий

Пример. Определим последовательность $\Lambda$, состоящую из точек $j^2$, $j = 2, 3, \ldots$, каждая из которых повторяется в последовательности $[\ln^{3/2} j]$ раз. Из леммы 2 работы [7], с учетом замечания 1 и леммы 1 этой же работы, нетрудно вывести, что $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется измеримая последовательность $\Lambda''$, такая, что $\Lambda \subset \Lambda''$ и $D_{BM}(\Lambda'') = 2\varepsilon$. А именно, положим $\Lambda'' = \Lambda \cup \Lambda'$, где $\Lambda' = \{n\varepsilon^{-1}\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что характеристика $D_{sd}(\Lambda)$, по-видимому, является новой. Было бы интересно и полезно получить ее описание в каких-либо “геометрических” терминах.

Нами установлено, что в вопросе о представлении $D$-инвариантного подпространства, определяемого формулой (2), в виде прямой суммы (4), величина $D_{sd}(\Lambda)$ играет ту же роль, что и плотность Берлинга–Мальявена в теореме А. Ниже сформулированы соответствующие утверждения (теоремы 1, 2, 3).

Рассмотрим $D$-инвариантное подпространство $W$ вида (2) с дискретным спектром $(-i\Lambda)$ и резидуальным промежутком $I_W$.

Теорема 1. *Предположим, что* $I_W \Subset (a;b)$.

*Тогда*

а) *если* $|I_W| > 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ *и справедливы соотношения*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{\ln|\lambda_j|} < +\infty, \quad \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{\ln|\lambda_j|} > -\infty, \tag{6}$$

*то* $W$ *представляется в виде* (4);

б) *если* $|I_W| < 2\pi D_{sd}(\Lambda)$, *то представление* (4) *не имеет места; иными словами, включение* $\overline{(\operatorname{span}\operatorname{Exp}(\Lambda)\oplus W_{I_W})} \subset W$ *— собственное.*

*Обратно, если* $W$ *представляется в виде* (4), *то* $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ *и справедливы оба соотношения* (6).

Теорема 2. *Предположим, что* $b - a < +\infty$ *и включение* $I_W \subset (a;b)$ *не компактно.*

*Тогда справедливы оба прямых утверждения*, а) *и* б) *теоремы* 1.

*Обратно, верна импликация: если* $W$ *представляется в виде* (4) *и* $b \in \overline{I_W}$ (*или* $a \in \overline{I_W}$), *то* $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ *и справедливо первое* (*или, соответственно, второе*) *из соотношений* (6).

Теорема 3. *Предположим, что* $I_W = (-\infty; d]$ (*либо* $I_W = [c;+\infty)$).

*Представление* (4) *для подпространства* $W$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ *и выполнено первое* (*соответственно, второе*) *из соотношений* (6).

3. Для дальнейшего изложения нам понадобится пространство Шварца $\mathscr{E}(I)$, где $I$ — произвольный промежуток. Пространство $\mathscr{E}(I)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых на $I$ функций и снабжено метризуемой топологией проективного предела банаховых пространств, аналогично случаю, когда $I = (a;b)$. Например, если $I = [c;d]$, то $\mathscr{E}(I)$ — проективный предел банаховых пространств $C^k[c;d]$; если $I = [c;d)$, $d < +\infty$, то $\mathscr{E}(I)$ — проективный предел банаховых пространств $C^k[c;d - k^{(-1)}]$.

Пространство $\mathscr{E}(I)$ — полное и метризуемое, т.е. пространство Фреше. Сильное сопряженное пространство $\mathscr{E}'(I)$ состоит из всех распределений $S \in \mathscr{E}'$, носители которых содержатся в $I$.

Рассмотрим последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такую, что соответствующая система экспоненциальных одночленов $\mathscr{E}xp(\Lambda)$ не полна в $\mathscr{E}(I)$. Обозначим замыкание множества $\operatorname{span}\mathscr{E}xp(\Lambda)$ в пространстве $\mathscr{E}(I)$ символом $E(\Lambda, I)$. С топологией, индуцированной из $\mathscr{E}(I)$, подпространство $E(\Lambda, I)$ само становится пространством Фреше.

Пусть $W$ — $D$-инвариантное подпространство в $\mathscr{E}(a;b)$ со спектром $(-i\Lambda)$ и резидуальным промежутком $I_W$; и пусть $U\colon E(\Lambda,(a;b)) \to E(\Lambda, I_W)$ — оператор сужения, ставящий в соответствие каждой функции $f \in E(\Lambda,(a;b))$ ее сужение на промежуток $I_W$.

Предложение 1. *Для того чтобы $D$-инвариантное подпространство $W$, определенное соотношением* (2), *представлялось в виде прямой суммы* (4), *необходимо и достаточно, чтобы оператор сужения $U$ был линейным топологическим изоморфизмом.*

Согласно теореме Пэли—Винера—Шварца [8, теорема 7.3.1], образ $\mathscr{F}(\mathscr{E}'(I))$ сильного сопряженного пространства $\mathscr{E}(I)$ при преобразовании Фурье—Лапласа $\mathscr{F}$ есть пространство целых функций экспоненциального типа $\mathscr{P}(I)$, определяемое как индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\tilde{P}_k$. В случае, когда $I = [c;d]$, пространство $\tilde{P}_k$ состоит из всех целых функций $\varphi$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{I,k} = \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k\exp(dy^+ - cy^-)},$$
$$y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + iy.$$

Если же, скажем, $I = [c;b)$, то

$$\|\varphi\|_{I,k} = \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k\exp(d_k y^+ - cy^-)},$$
$$y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + iy,$$

где $c < d_1 < \dots < d_k < \dots < b$, $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = b$. Для промежутков $I$ другого вида все определения даются с очевидными изменениями.

Вложения $\tilde{P}_k \subset \tilde{P}_{k+1}$ вполне непрерывны, поэтому $\mathscr{P}(I)$, как и алгебра Шварца $\mathscr{P}$, есть локально-выпуклое пространство типа $(LN^*)$. Кроме того, $\mathscr{P}(I)$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Пусть промежутки $I$ и $I'$ не пусты и удовлетворяют условиям: $I'\setminus I \neq \varnothing$, $\partial I \cap \partial I' \neq \varnothing$. Привлекая рассуждения с использованием следствия из теоремы 7 работы [9], аналогичные проведенным в работе [10], выводим следующее утверждение.

Предложение 2. *Для того чтобы оператор сужения*

$$U\colon E(\Lambda, I') \to E(\Lambda, I)$$

*был линейным топологическим изморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая интерполяционная задача: для любой функ-*

*ции* $\Psi \in \mathcal{P}(I')$ *существует функция* $\psi \in \mathcal{P}(I)$ *такая, что разность* $(\Psi - \psi)$ *обращается в нуль на* $\Lambda$.

Пусть, как и выше, $I = \langle c; d \rangle$ – конечный или бесконечный промежуток (символ "$\langle$" может быть как круглой "(", так и квадратной "[" скобкой, аналогичный смысл имеет символ "$\rangle$"). С учетом всего сказанного выше, основные результаты (теоремы 1–3) вытекают из следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\Lambda$ *и промежуток* $I$ *таковы, что экспоненциальная система* $\mathcal{E}xp(\Lambda)$ *не полна в* $\mathcal{E}(I)$.

I. 1) *Если* $2\pi D_{sd}(\Lambda) < |I|$ *и выполнены оба соотношения* (6), *то интерполяционная задача из предложения* 2 *разрешима для пары пространств* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{P}(I)$.

2) *Если* $2\pi D_{sd}(\Lambda) > |I|$ *или* $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$, *то интерполяционная задача из предложения* 2 *не разрешима ни для какой пары пространств* $\mathcal{P}(I')$ *и* $\mathcal{P}(I)$.

3) *Если* $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ *и выполнено первое* (*второе*) *из соотношений* (6), *то интерполяционная задача из предложения* 2 *разрешима для пары пространств* $\mathcal{P}((-\infty; d\rangle)$ (*соответственно*, $\mathcal{P}(\langle c; +\infty))$) *и* $\mathcal{P}(I)$.

II. *Предположим, что существует промежуток* $I'$, *удовлетворяющий условиям*: $I' \setminus I \neq \varnothing$, $\partial I' \cap \partial I \neq \varnothing$ – *такой, что* $\sup_{t \in I} \in \overline{I'}$ (*или* $\inf_{t \in I} \in \overline{I'}$) *и для пары пространств* $\mathcal{P}(I')$ *и* $\mathcal{P}(I)$ *разрешима интерполяционная задача из предложения* 2.

*Тогда* $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$, $2\pi D_{sd}(\Lambda) \le |I|$ *и выполнено первое* (*соответственно, второе*) *из соотношений* (6).

4. Заключительные замечания.

1. Если $I = (-\infty; d\rangle$ (или $I = \langle c; +\infty)$), то выполнение первого (или, соответственно, второго) из соотношений (6), в совокупности с требованием $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$, представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости интерполяционной задачи из предложения 2 для пары пространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(I)$.

2. В настоящий момент нам не известно, существует ли для заданного конечного промежутка $I$ последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющая соотношениям (6) и такая, что $2\pi D_{sd}(\Lambda) = |I|$, а интерполяционная задача из предложения 2 не разрешима для пары пространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(I)$. Однако нами построена функция $F \in \mathcal{P}$ со следующими свойствами: $F$ не является медленно убывающей, $D_{BM}(\Lambda_F) = D_{sd}(\Lambda_F)$, где $\Lambda_F$ – нулевое множество функции $F$.

3. В связи с приведенными в настоящей работе результатами (теоремы 1–4) представляет интерес умение определять, является ли заданная последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$, нулевым (под-)множеством медленно убывающей функции? В работе [11] нами получен ряд результатов в этом направлении. Например, используя тот же подход, что и в [11], можно показать, что для последовательности $\Lambda = \{\lambda_j\}$, удовлетворяющей обоим неравенствам (6), требование $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ влечет следующее соотношение:

$$n_{\mathrm{Re}\,\Lambda}(x,1) = O(\ln|x|), \quad |x| \to +\infty,$$

где $n_{\mathrm{Re}\,\Lambda}(x,1)$ – число точек последовательности $\mathrm{Re}\,\Lambda = \{\mathrm{Re}\,\lambda_j\}$ в промежутке $[x-1; x+1]$.


## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор признателен рецензенту за полезные замечания и комментарии.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Aleman A., Korenblum B.* Derivation-Invariant Subspaces of $C^\infty$. Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8. № 2. P. 493–512.
2. *Абузярова Н.Ф.* Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.
3. *Koosis P.* Logarithmic Integral II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
4. *Aleman A., Baranov A., Belov Yu.* Subspaces of $C^\infty$ invariant under the differentiation // J. Functional Analysis. 2015. V. 268. P. 2421–2439.
5. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division, IV // Amer. J. Math. 1960. V. 57. № 1. P. 522–588.
6. *Berenstein C.A., Taylor B.A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. in Math. 1980. V. 33. P. 109–143.
7. *Abuzyarova N.F.* On conditions of invertibility in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 6. P. 1141–1153.
8. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
9. *Дьедонне Ж., Шварц Л.* Двойственность в пространствах (F) и (LF). Математика. Сб. пер. иностр. ст. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–107.
10. *Красичков-Терновский И.Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 931–945.
11. *Абузярова Н.Ф.* Обратимые по Эренпрайсу функции в алгебре Шварца // ДАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 7–11.

# REPRESENTATION OF SYNTHESABLE DIFFERENTIATION-INVARIANT SUBSPACES OF THE SCHWARTZ SPACE

**N. F. Abuzyarova**[a]

[a] *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

We consider the differentiation-invariant subspace $W$ in the Schwartz space $C^{\infty}(a;b)$ which admits weak spectral synthesis. We obtain the conditions under which $W$ is represented as the direct (algebraical and topological) sum of its residual subspace and the closed subspace spanned by the set of exponential monomials contained in $W$.

*Keywords:* spectral synthesis, invariant subspaces, slowly decreasing function, Beurling–Malliavin density