

УДК 517.957

ОБ АТТРАКТОРАХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. К. А. Бекмаганбетов^{1,2,*}, В. В. Чепыжов^{3,4,**}, Г. А. Чечкин^{2,5,6,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.02.2021 г.

Поступило 18.02.2021 г.

После доработки 18.02.2021 г.

Принято к публикации 09.03.2021 г.

В работе изучается система уравнений реакции–диффузии в перфорированной области с быстро осциллирующими членами в самом уравнении и в граничных условиях. Нелинейная функция в уравнениях может не удовлетворять условию Липшица, поэтому теорема единственности для соответствующей начально–краевой задачи для рассматриваемой системы уравнений реакции–диффузии может не выполняться. При этом доказано, что траекторные аттракторы этой системы слабо стремятся в соответствующей топологии к траекторным аттракторам усредненной системы реакции–диффузии со “странным членом” (потенциалом).

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, уравнение реакции–диффузии, нелинейные уравнения, слабая сходимости, перфорированная область, быстро осциллирующие члены, странный член

DOI: 10.31857/S2686954321030036

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к задачам в перфорированных областях возник в связи прикладными задачами биологии, механики и инженерии. Работы, посвященные асимптотическому анализу таких задач, см., например, [1–5] и библиографию в этих работах. Особенно интересно изучать задачи, в которых может не выполняться теорема единственности. В таких задачах проводится усреднение соот-

ветствующих аттракторов (см. рис. 1¹, например). Аттракторы характеризуют всю динамику рассматриваемой модели (см., например, монографии [6–8] и ссылки в них). В работе [9] изучалось усреднение аттракторов скалярных эволюционных уравнений с диссипацией в периодически перфорированной области. В настоящей работе мы рассматриваем начально–краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими членами в перфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Нур-Султан, Казахстан

² Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

³ Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

⁴ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

⁵ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁶ Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

*E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

**E-mail: chep@iitp.ru

***E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, с кусочно–гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть G_0 – область, принадлежащая $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$, такая, что \bar{G}_0 является компактом, диффеоморфным шару.

Пусть $\delta > 0$ и M – некоторое множество, введем следующее обозначение: $\delta M = \{x: \delta^{-1}x \in M\}$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ достаточно мало, чтобы

$$\varepsilon^{n/(n-2)}G_0 \subset \varepsilon Y.$$

¹ Из открытых источников.

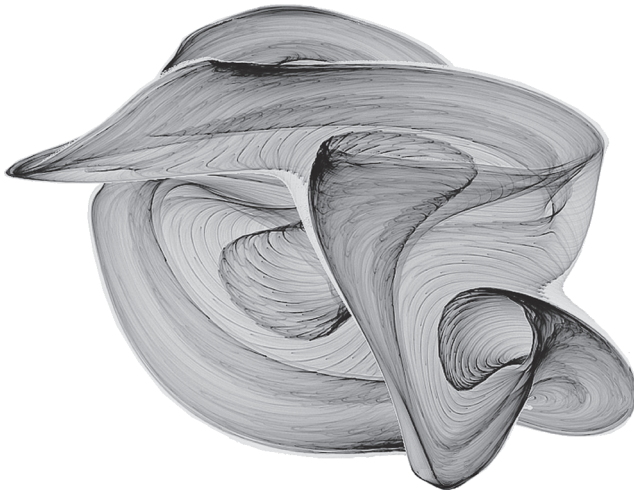


Рис. 1. Аттрактор.

Для $j \in \mathbb{Z}^n$ определим

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, \quad Y_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon Y, \quad G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^{n/(n-2)} G_0.$$

Определим область $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega: \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{n\varepsilon}\}$ и множество допустимых индексов

$$\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n: G_\varepsilon^j \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon \neq \emptyset\}.$$

Заметим, что $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$, где $d > 0$ – некоторая постоянная. Рассмотрим область

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{G}_\varepsilon, \quad \text{где } G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j.$$

Введем следующие обозначения:

$$Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, +\infty), \quad Q = \Omega \times (0, +\infty).$$

Мы изучаем асимптотическое поведение траекторных аттракторов начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} &= H \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^{n/(2-n)} B_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \\ j &\in \Upsilon_\varepsilon, \quad t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon &= U(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = (u^1, \dots, u^N)^\top$, $f = (f^1, \dots, f^N)^\top$ и $g = (g^1, \dots, g^N)^\top$, ν – вектор единичной внешней нормали к границе. Функция $a(x, y) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$ такая, что $0 < a_0 \leq a(x, y) \leq A_0$ с некоторыми постоянными a_0, A_0 ,

а функция $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеет среднее $\bar{a}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в пространстве $L_{\infty, *w}(\Omega)$, т.е.

$$\int_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \rightarrow \int_\Omega \bar{a}(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \tag{2}$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$. Матрица кросс-диффузии H – это квадратная матрица размера $N \times N$ с постоянными коэффициентами, имеющая положительную симметричную часть $\frac{1}{2}(H + H^\top) \geq \alpha I$, где $\alpha > 0$, а I – единичная матрица порядка N . Отметим, что матрица H не обязательно симметрична, также отметим, что принцип максимума может не выполняться для нашей задачи.

Для вектор-функции $g(x, y)$ будем считать, что функции $g_\varepsilon^i(x) = g^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ и имеют средние $\bar{g}^i(x)$ в пространстве $V' = H^{-1}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, т.е.

$$\int_\Omega g^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \rightarrow \int_\Omega \bar{g}^i(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \tag{3}$$

для любой функции $\varphi \in V = H_0^1(\Omega)$ и для всех $i = 1, \dots, N$.

В работе [10] приведены примеры функций вида $a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, которые удовлетворяют условиям усреднения (2) и (3).

Здесь $B_\varepsilon^j(x)$ – диагональная матрица с ограниченными элементами вида

$$b^{11}\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}}\right), \dots, b^{NN}\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}}\right), \quad j \in \Upsilon_\varepsilon,$$

где $b^{kk}(x, y) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ – 1-периодические по y функции такие, что

$$0 < b_0 \leq b^{kk}(x, y) \leq B_0 \tag{4}$$

с некоторыми постоянными b_0, B_0 для всех $k = 1, 2, \dots, N$.

Обозначим также вектор

$$\bar{B}(x, y) := (b^{11}(x, y), \dots, b^{NN}(x, y))^\top,$$

а диагональную матрицу с элементами $b^{11}(x, y), \dots, b^{NN}(x, y)$ – через $B(x, y)$.

Предположим, что вектор-функция $f(v) \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{p_i/(p_i-1)} \leq C_0 \left(\sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i} + 1 \right), \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C \leq \sum_{i=1}^N f^i(v) v^i, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N, \quad (6)$$

где $\gamma_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, N$. Для определенности будем считать, что $p_N \geq p_{N-1} \geq \dots \geq p_1 \geq 2$. Заметим, что выполнение условия Липшица для функции $f(v)$ относительно v не предполагается.

Введем следующие обозначения для пространств $\mathbf{H} := [L_2(\Omega)]^N$, $\mathbf{H}_\varepsilon := [L_2(\Omega_\varepsilon)]^N$, $\mathbf{V} := [H_0^1(\Omega)]^N$, $\mathbf{V}_\varepsilon := [H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^N$ – множество всех вектор-функций из $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^N$ с нулевым следом на $\partial\Omega$. Нормы в этих пространствах определяют, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_\varepsilon^2 &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^N |v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_1^2 &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\nabla v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_{1\varepsilon}^2 &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^N |\nabla v^i(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Напомним, что $\mathbf{V}' := [H^{-1}(\Omega)]^N$ – двойственное пространство к пространству \mathbf{V} , кроме того, \mathbf{V}'_ε – двойственное пространство для \mathbf{V}_ε .

Пусть $q_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$ для всех $i = 1, \dots, N$. Будем использовать следующие векторные обозначения $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ и $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$, а также определим пространства

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\mathbf{p} &:= L_{p_1}(\Omega) \times \dots \times L_{p_N}(\Omega), \\ \mathbf{L}_{\mathbf{p},\varepsilon} &:= L_{p_1}(\Omega_\varepsilon) \times \dots \times L_{p_N}(\Omega_\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\mathbf{p}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_\mathbf{p}) &:= L_{p_1}(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(\Omega)) \times \dots \times L_{p_N}(\mathbb{R}_+; L_{p_N}(\Omega)), \\ \mathbf{L}_\mathbf{p}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{\mathbf{p},\varepsilon}) &:= L_{p_1}(\mathbb{R}_+; L_{p_1}(\Omega_\varepsilon)) \times \dots \times L_{p_N}(\mathbb{R}_+; L_{p_N}(\Omega_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Как и в [7], будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), т.е. функции

$$u_\varepsilon(x, s) \in \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\mathbf{p}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{\mathbf{p},\varepsilon}),$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \cdot \psi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} H \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx dt + \\ &+ \int_{Q_\varepsilon} a_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon) \cdot \psi dx dt + \\ &+ \varepsilon^{n/(2-n)} \sum_{j \in \mathbb{Y}_\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^j} B_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon \cdot \psi dx dt = \\ &= \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dx dt \end{aligned} \quad (7)$$

для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$. Здесь $y_1 \cdot y_2$ означает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$.

Если $u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_\mathbf{p}(0, M; \mathbf{L}_{\mathbf{p},\varepsilon})$, тогда из условия (5) следует, что $f(u_\varepsilon(x, t)) \in \mathbf{L}_\mathbf{q}(0, M; \mathbf{L}_{\mathbf{q},\varepsilon})$. В то же время, если $u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}_\varepsilon)$, тогда

$$\Delta u_\varepsilon(x, t) + g_\varepsilon(x) \in \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon).$$

Поэтому для произвольного слабого решения $u_\varepsilon(x, s)$ задачи (1) имеем

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \in \mathbf{L}_\mathbf{q}(0, M; \mathbf{L}_{\mathbf{q},\varepsilon}) + \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon).$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что

$$\mathbf{L}_\mathbf{q}(0, M; \mathbf{L}_{\mathbf{q},\varepsilon}) + \mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon) \subset \mathbf{L}_\mathbf{q}(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}}),$$

где пространство $\mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}} := H_\varepsilon^{-r_1} \times \dots \times H_\varepsilon^{-r_N}$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ и $r_i = \max \left\{ 1, n \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{2} \right) \right\}$ для всех $i = 1, \dots, N$ (соболевское пространство с отрицательным показателем). Следовательно, для любого слабого решения $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1) имеем $\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \in \mathbf{L}_\mathbf{q}(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}})$.

З а м е ч а н и е 1. Существование слабого решения $u(x, s)$ задачи (1) для любой функции $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$ и фиксированного ε , такого, что $u(x, 0) = U(x)$, может быть доказано стандартным способом (см., например, [6]). Это решение может быть не единственным, поскольку функция $f(v)$ удовлетворяет условиям (5), (6) и для нее не предполагается выполнение условия Липшица относительно v .

Для удобства будем опускать индекс ε в обозначениях пространств, там, где это не вызывает непонимания. Положим $E_1 = \mathbf{L}_\mathbf{p} \cap \mathbf{V}$, $E_0 = \mathbf{H}^{-\mathbf{r}}$, $E = \mathbf{H}$ и $A(u) = H \Delta u - a(\cdot) f(u) + g(\cdot)$ и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in R$

$$\mathcal{F}_{t_1, t_2} := \mathbf{L}_p(t_1, t_2; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\} \quad (8)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} := \|v\|_{\mathbf{L}_p(t_1, t_2; \mathbf{L}_p)} + \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(0, M; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_q(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r})}. \quad (9)$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = \mathbf{L}_q(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r})$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, а если $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, тогда $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Далее обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{\text{loc}} &= \mathbf{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\}, \\ \mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}} &= \mathbf{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{p, \varepsilon}) \cap \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}) \right. \right\}, \end{aligned}$$

а через $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ и пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, т.е. если $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, тогда и $u(h+s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для любых $h \geq 0$. Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{H})$, определим метрики $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах \mathcal{F}_{t_1, t_2} следующим образом:

$$\rho_{0, M}(u, v) = \left(\int_0^M \|u(s) - v(s)\|^2 ds \right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0, M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ (соответственно $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ при $k \rightarrow \infty$ в Θ_+^{loc} , если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{H})} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1). Полугруппа сдвигов $\{S(t)\}$, дей-

ствующая на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, непрерывна в рассматриваемой топологии Θ_+^{loc} .

Определим ограниченные множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, используя банаховы пространства

$$\mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_p^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\}, \quad (10)$$

\mathcal{F}_+^b – подпространство пространства $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$.

Рассмотрим полугруппу сдвигов $\{S(t)\}$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, $S(t): \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $t \geq 0$.

Пусть \mathcal{K}_ε означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = \mathbf{L}_p^b(\mathbb{R}; \mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}^{-r}) \right. \right\}.$$

Имеет место

Л е м м а 1. При выполнении условий (5), (6) задача (1) имеет траекторные аттракторы \mathfrak{A}_ε в топологическом пространстве Θ_+^{loc} . Множество \mathfrak{A}_ε равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в \mathcal{F}_+^b и компактно в Θ_+^{loc} . Более того,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ K_\varepsilon,$$

ядро \mathcal{K}_ε – непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в \mathcal{F}^b . Напомним, что пространства \mathcal{F}_+^b и Θ_+^{loc} зависят от ε .

Доказательство этого предложения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [8], для более частного случая. Существование поглощающего множества, ограниченного в \mathcal{F}_+^b и компактного в Θ_+^{loc} , доказывается так же, как и в [7].

2. УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

Чтобы определить “странный член” (потенциал в предельном уравнении), рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_y v &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_y} + B(x, y)v &= \bar{B}(x, y), \quad y \in \partial G_0, \\ v &\rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где матрица $B(x, y)$ и вектор $\bar{B}(x, y)$ были определены выше. В этой задаче переменная x играет роль медленного параметра. Определим предельный потенциал по следующей формуле:

$$V^{kk}(x) = \int_{\partial G_0} \frac{\partial}{\partial v_y} v^k(x, y) d\sigma_y, \quad k = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= H \Delta u - \bar{a}(x) f(u) - V(x) u + \bar{g}(x), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial \Omega, \\ u &= U(x), \quad t = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $V(x)$ — диагональная матрица с элементами $V^{kk}(x)$, $k = 1, \dots, N$. Очевидно, что задача (12) также имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathcal{A}}$ в пространстве траекторий $\bar{\mathcal{K}}^+$, соответствующем задаче (12), и

$$\bar{\mathcal{A}} = \Pi_+ \bar{\mathcal{K}},$$

где $\bar{\mathcal{K}}$ — ядро задачи (12) в \mathcal{F}^b .

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

Т е о р е м а 1. *В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение*

$$\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Более того

$$\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \quad \text{в} \quad \Theta_+^{\text{loc}}.$$

З а м е ч а н и е 2. Напомним, что пространства в теореме 1 зависят от ε . Все функции могут быть продолжены внутрь отверстий с сохранением соответствующих норм.

Если рассмотреть уравнения реакции–диффузии, для которых имеет место теорема единственности в задаче Коши. Для этого достаточно предположить, что нелинейный член $f(u)$ в системе уравнений (1) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) &\geq -C|v_1 - v_2|^2 \\ \text{для всех} \quad v_1, v_2 &\in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (13)$$

(см. [7]). В [7] было доказано, что если выполнено (13), тогда уравнения (1) и (12) генерируют динамические полугруппы в \mathbf{H} , имеющие глобальные аттракторы \mathcal{A}_ε и $\bar{\mathcal{A}}$, ограниченные в пространстве $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (см. также [8]). Пусть

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) | u \in \mathcal{A}_\varepsilon\}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \{u(0) | u \in \bar{\mathcal{A}}\}.$$

При этом выполняется следующее

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы 1 имеет место предельное соотношение*

$$\text{dist}_{\mathbf{H}^\varepsilon}(\mathcal{A}_\varepsilon, \bar{\mathcal{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0+).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора поддержана КН МОН РК (грант AP08855579). Научные результаты второго автора в первом параграфе поддержаны грантом РФФИ (проект 20-01-00469). Научный вклад третьего автора в результаты второго параграфа поддержан грантом РФФИ (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. Amsterdam: North–Holland; 1992.
3. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
4. Cioranescu D., Murat F. Un terme étrange venu d'ailleurs I & II. In Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar, Volume II & III, ed. H. Berzis, J.L. Lions. Research Notes in Mathematics, 60 & 70, London: Pitman, 98–138 & 154–178; 1982.
5. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 7. С. 3–20.
6. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
7. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc.; 2002.
8. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag; 1988.
9. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140.
10. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 1. С. 13–50.

ON ATTRACTORS OF REACTION–DIFFUSION EQUATIONS IN A POROUS ORTHOTROPIC MEDIUM

K. A. Bekmaganbetov^{a,b}, V. V. Chepyzhov^{c,d}, and G. A. Chechkin^{b,e,f}

^a *Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Nur-Sultan, Kazakhstan*

^b *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^c *Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^d *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

^e *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^f *Institute of Mathematics with Computing Center – Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper we study a system of reaction–diffusion equations in a perforated domain with rapidly oscillating terms in the equation and in the boundary conditions. A nonlinear function in the equations may not satisfy the Lipschitz condition and hence, the uniqueness theorem for the corresponding initial–boundary value problem for the considered system of reaction-diffusion equations may not be satisfied. It was proved that the trajectory attractors of this system weakly converge in the corresponding topology to the trajectory attractors of the homogenized reaction-diffusion system with a “strange term” (potential).

Keywords: attractors, homogenization, reaction-diffusion equation, nonlinear equations, weak convergence, perforated domain, rapidly oscillating terms, strange term