ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 16–20

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА

© 2021 г. В. И. Богачев[1,2,3,4,*], Т. И. Красовицкий[1,4], С. В. Шапошников[1,2,4]

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 21.03.2021 г.
Поступило 26.03.2021 г.
После доработки 26.03.2021 г.
Принято к публикации 04.04.2021 г.

В работе дан положительный ответ на вопрос о возможности существования нескольких вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова при всех начальных условиях: построен первый пример уравнения с единичной матрицей диффузии и гладким коэффициентом сноса, для которого задача Коши при всяком вероятностном начальном условии имеет бесконечномерный симплекс вероятностных решений.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, задача Коши, единственность вероятностного решения

DOI: 10.31857/S2686954321030048

Мы рассматриваем вероятностные решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова следующего вида:

$$\partial_t\mu_t = \Delta\mu_t - \operatorname{div}(b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{1}$$

где ν – борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, коэффициент $b(x) = (b^i(x))_{1\le i\le d}$ не зависит от t и $b^i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $T > 0$. Вероятностным решением задачи (1) называется семейство борелевских вероятностных мер $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ на $\mathbb{R}^d$, борелевски измеримое по t и удовлетворяющее равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\nu = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(\Delta\varphi - \langle b,\nabla\varphi\rangle)d\mu_s ds$$

для всякого $t \in [0,T]$ и всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Отметим, что в рассматриваемой ситуации гладкого сноса b существует такая бесконечно гладкая положительная функция $\varrho(x,t)$ на $\mathbb{R}^d\times(0,T)$, что $\mu_t = \varrho(x,t)dx$ для почти всех $t \in (0,T)$ и функция ϱ является классическим решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Далее мы используем обозначения

$$Lu = \Delta u + \langle b,\nabla u\rangle, \quad L^*u = \Delta u - \operatorname{div}(bu)$$

и записываем уравнение (1) для меры $\mu_t = \varrho(x,t)dx$ следующим образом:

$$\partial_t\varrho = L^*\varrho.$$

Вопрос о единственности вероятностного решения данной задачи был поставлен еще А.Н. Колмогоровым (см. [1, 2]). Известные достаточные условия единственности и примеры неединственности в размерности $d \ge 3$ приведены в [3, глава 9]. Проблема единственности в одномерном случае ($d = 1$) была рассмотрена такими классиками, как У. Феллер [4], К. Иосида [5] и Э. Хилле [6], но в иной постановке, связанной с полугруппами. В недавних работах [7, 8] показано, что в одномерном случае для всякой локально ограниченной борелевской функции b, не зависящей от времени t, вероятностное решение единственно. В той же работе впервые построен пример неединственности для $d = 2$. В одномерном случае в [8, замечание 4.6] приведен пример уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, для которого задача Коши не для всех начальных вероятностных условий имеет вероятностное решение. В [3, глава 9] при $d \ge 3$ и в [8] при $d \ge 2$ примеры неединственности вероятностных решений построены для очень специальных начальных условий, причем специальный вид начального условия существенно ис-

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
[3]*Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия*
[4]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: vibogach@mail.ru*

пользуется в построении. Оставалось неясным, может ли задача Коши (1) иметь несколько вероятностных решений для каждого вероятностного начального условия. В настоящем сообщении мы даем положительный ответ на этот вопрос.

Пусть $d \geq 2$. Положим

$$b(x,y,z) = (B(x), C(y), D(z)),$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{d-2}$ и

$$B(x) = -x - 6e^{x^2/2},$$

$$C(y) = -(1+y^2)\mathrm{arctg}y + \frac{2y}{1+y^2}, \quad D(z) = -z.$$

Если $d = 2$, то компонента $D(z)$ отсутствует.

Теорема 1. *Для всякой вероятностной меры ν задача Коши* (1) *с коэффициентом сноса $b = (B, C, D)$* (*или $b = (B, C)$ в случае $d = 2$*) *и начальным условием ν имеет бесконечно много линейно независимых вероятностных решений*.

Положим

$$L_x = \partial_x^2 + B(x)\partial_x, \quad L_y = \partial_y^2 + C(y)\partial_y,$$

$$L_z = \partial_z^2 + D(z)\partial_z,$$

$$L = L_x + L_y + L_z.$$

Если $d = 2$, то $L = L_x + L_y$.

Пусть сначала $\nu = \delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} \otimes \delta_{z_0}$. Даже для таких ν ранее не было известно примеров неединственности. Построим бесконечно много линейно независимых вероятностных решений задачи Коши в виде произведений

$$u(x,t)v(y,t)w(z,t),$$

где

$$\partial_t u = L_x^* u, \quad \partial_t v = L_y^* v, \quad \partial_t w = L_z^* w$$

и $u|_{t=0} = \delta_{x_0}$, $v|_{t=0} = \delta_{y_0}$, $w|_{t=0} = \delta_{z_0}$.

Ясно, что функция $\varrho = uvw$ удовлетворяет уравнению $\partial_t \varrho = L^* \varrho$ с начальным условием ν. Для построения u и w нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения из [3, глава 5] о полугруппах, порождаемых операторами L_x и L_z.

Несложно проверить, что стандартные гауссовские меры γ_x и γ_z с плотностями $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ и $(2\pi)^{(2-d)/2}e^{-|z|^2/2}$ удовлетворяют уравнениям

$$L_x^* \gamma_x = 0, \quad L_z^* \gamma_z = 0.$$

Согласно [3, теорема 5.2.2], оператор L_x порождает сильно непрерывную субмарковскую операторную полугруппу $\{T_t\}_{t \geq 0}$ в $L^1(\gamma_x)$, причем мера γ_x субинвариантна для T_t, т.е. интеграл от $T_t f$ по мере γ_x не превосходит интеграл от f для всех ограниченных измеримых функций $f \geq 0$. Согласно [3, задача 4.5.7] (полное решение этой задачи приведено в [8]), мера γ_x не инвариантна для операторов T_t. В силу [3, теорема 5.4.5] для всякого $f \in L^1(\gamma_x)$ существует непрерывная по $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ версия $T_t f(x)$, задаваемая равенством

$$T_t f(x) = \int k(t,x,a) f(a) da,$$

где функция k является гладкой и положительной на $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Именно с такой версией $T_t f$ мы работаем дальше. Выражение

$$T_t^* \sigma = \int k(t,x,a) \sigma(dx) da$$

определяет сопряженную полугруппу на мерах, причем

$$\partial_t T_t^* \sigma = L_x^* T_t^* \sigma, \quad T_t^* \sigma|_{t=0} = \sigma.$$

Согласно [8, следствие 2.5], для всякой вероятностной меры σ не все меры $T_t^* \sigma$ являются вероятностными. Положим $u(x,t)dx = T_t^* \delta_{x_0}$, т.е.

$$u(x,t) = k(t, x_0, x).$$

Пусть

$$q(t) = \int u(x,t) dx = \int k(t, x_0, x) dx = T_t 1(x_0).$$

Лемма 1. *Функция q отлична от константы, бесконечно дифференцируема на* $[0, T]$, $q'(t) \leq 0$, $q(0) = 1$, $q^{(j)}(0) = 0$ *при* $j \geq 1$.

Доказательство. Функция $h(x,t) = T_t 1(x)$ является решением задачи Коши $\partial_t h = L_x h$, $h|_{t=0} = 1$. Коэффициенты оператора L_x и начальное условие бесконечно гладкие, что влечет гладкость функции h вплоть до $t = 0$. Поясним это подробнее. Пусть ψ_j – гладкие функции с компактным носителем, которые поточечно сходятся к 1, причем $\psi_j(x) = 1$ на $[-j, j]$, $0 \leq \psi_j \leq 1$. Функции $h_j = T_t \psi_j$ сходятся к $h = T_t 1$ при каждом t в $L^1(\gamma_x)$. Согласно [8, лемма 2.2], функция h_j равна пределу решений $h_{j,m}$ краевых задач $\partial_t h_{j,m} = L_x h_{j,m}$, $h_{j,m}(-m,t) = h_{j,m}(m,t)$, $h_{j,m}(x,0) = \psi_j(x)$. При достаточно большом m решения этих краевых задач являются гладкими на $[-m, m] \times [0, T]$, а в силу локальных априорных оценок (см. [9, теорема 10.1]) предельные функции h_j также являются гладкими и их производные по x и t всякого фиксированного порядка равномерно ограничены по j на всяком множестве вида $[0, T] \times [-m, m]$.

Следовательно, предельная функция h является гладкой вплоть до $t = 0$. В частности, функция $q(t) = h(x_0, t)$ бесконечно дифференцируема на $[0, T]$. Пусть $s > 0$. Так как $T_s 1 \leq 1$, то

$$q(t+s) = T_{t+s}1(x_0) = T_t(T_s1)(x_0) \le T_t1(x_0) = q(t).$$

Таким образом, функция q убывает, поэтому $q' \le 0$. Заметим, что

$$\partial_t h(x,0) = L_x h(x,0) = L_x 1 = 0,$$
$$\partial_t^2 h(x,0) = L_x \partial_t h(x,0) = 0, \ldots, \partial_t^j h(x,0) =$$
$$= L_x \partial_t^{j-1} h(x,0) = 0.$$

Следовательно, $q^{(j)}(0) = 0$ при $j \ge 1$. Функция q отлична от константы, так как $q(0) = 1$ и $q(t) < 1$ при $t > 0$. Последнее вытекает из того, что если $q(t) = 1$ при некотором $t > 0$, то $q(s) = 1$ при $s \le t$, поэтому мера γ_x инвариантна.

Оператор L_z порождает полугруппу Орнштейна–Уленбека $\{S_t\}_{t\ge0}$ на $L^1(\gamma_z)$. Для всякой вероятностной меры σ соответствующая полугруппа $\{S_t^*\}_{t\ge0}$ на мерах задает вероятностное решение $S_t^*\sigma$ уравнения $\partial_t S_t^*\sigma = L_z^* S_t^*\sigma$ с начальным условием $S_t^*\sigma|_{t=0} = \sigma$. Положим

$$w(z,t)dz = S_t^*\delta_{z_0}.$$

Заметим, что при каждом t функция $w(\cdot,t)$ является вероятностной плотностью, а функция $u(\cdot,t)$ не является вероятностной плотностью. Для построения вероятностного решения нам необходимо задать функцию v так, чтобы произведение uvw стало вероятностной плотностью. Кроме того, меняя множитель v, мы построим бесконечно много линейно независимых вероятностных решений. Решение v построим в виде суммы двух функций v_1 и v_2, где функция v_1 — вероятностное решение уравнения $\partial_t v = L_y^* v$ с начальным условием $v|_{t=0} = \delta_{y_0}$ (это решение фиксировано для дальнейшего), а функция v_2 — некоторое специальное неотрицательное интегрируемое решение уравнения $\partial_t v = L_y^* v$ с начальным условием $v|_{t=0} = 0$, которое далее будет меняться, причем

$$\int v(y,t)dy = 1 + \int v_2(y,t)dy = \frac{1}{q(t)}.$$

Вероятностное решение v_1 существует согласно [3, следствие 6.6.6]. Действительно, функция y^2 является функцией Ляпунова для оператора L_y: для нее имеем $L_y y^2 = 2 + 2C(y)y \le 6$, ибо

$$C(y)y = -(1+y^2)y\operatorname{arctg} y + \frac{2y^2}{1+y^2} \le 2.$$

Существование функции v_2 обеспечивает следующая лемма, в которой применяется теория вырождающихся параболических уравнений. Использование вырождающихся уравнений для построения примеров неединственности вероятностных решений стационарного уравнения Колмогорова было предложено в работе [10].

Положим

$$p(t) = -\frac{q'(t)}{q(t)^2}.$$

Л е м м а 2. *Пусть p_1 и p_2 — гладкие неотрицательные функции на $[0,T]$, причем $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $p_1^{(k)}(0) = p_2^{(k)}(0) = 0$ при всех $k \ge 1$ и*

$$p_1(t) + p_2(t) = \frac{2}{\pi} p(t).$$

Тогда существует бесконечно гладкая функция v на $[0,T]\times\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\partial_t v = L_y^* v, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v \ge 0,$$
$$\int v(y,t)dy = \frac{1}{q(t)} - 1.$$

Более того,

$$\lim_{y\to+\infty} v(y,t)(1+y^2) = p_2(t),$$
$$\lim_{y\to-\infty} v(y,t)(1+y^2) = p_1(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi(s) = s$. Сделаем замену переменной $\eta = \psi(y)$ в задаче Коши $\partial_t v = L_y^* v$, $v|_{t=0} = 0$. Тогда уравнение преобразуется в вырожденное уравнение на прямоугольнике $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,T)$:

$$\partial_t V = \partial_\eta^2(\mathcal{A}V) - \partial_\eta(\mathcal{B}V)$$
$$\text{или} \quad \partial_t V = \alpha\partial_\eta^2 V + \beta\partial_\eta V + \gamma V, \tag{2}$$

где

$$V(t,\eta) = v(t,\psi^{-1}(\eta))(\psi^{-1}(\eta))',$$
$$\mathcal{A} = (\psi'(\psi^{-1}(\eta)))^2,$$
$$\mathcal{B} = \psi''(\psi^{-1}(\eta)) + C(\psi^{-1}(\eta))\psi'(\psi^{-1}(\eta)),$$
$$\alpha = A, \quad \beta = 2\partial_\eta\mathcal{A} - \mathcal{B}, \quad \gamma = \partial_\eta^2\mathcal{A} - \partial_\eta\mathcal{B}.$$

Отметим, что после обратной замены переменной всякое неотрицательное решение $V(\eta,t)$ уравнения (2) дает неотрицательное решение $v(y,t)$ исходного уравнения. Для каждого $t \in [0,T]$ интеграл функции $V(\cdot,t)$ по отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ равен интегралу функции $v(\cdot,t)$ по всей прямой.

Далее рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2). Уравнение вырождается на границе, поэтому краевые условия должны ставиться лишь на части границы, обозначаемой через Σ_2 и определяемой посредством функции Фикеры. Мы проверим, что в данном случае это дает обычные краевые условия, как и для невырожденного уравнения.

Напомним, что если уравнение имеет вид $aD^2 + bD + c = 0$, то функция Фикеры определяется в точках границы области, где $a^{ij}n_in_j = 0$ для внутренней нормали n, и равна $(b^k - a^{kj}_{x_j})n_k$, см. [11, гл. 1, § 1, § 5, теорема 1.5.1]. Поскольку коэффициент α уравнения (2) при продолжении нулем вне интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ есть функция класса C^2 на всей прямой, равная нулю в концах интервала вместе с производными первого и второго порядка, получаем, что функция Фикеры имеет вид $\varphi(\eta) = -\mathrm{sign}(\eta)\beta(\eta)$, поэтому $\Sigma_2 = \{(\eta, t)\colon \mathrm{sign}(\eta)\beta(\eta) > 0\}$. Для выбранного выше коэффициента сноса $C(y)$ боковые отрезки $\frac{\pi}{2}\times[0,T]$ и $-\frac{\pi}{2}\times[0,T]$ лежат в Σ_2. Таким образом, из теории вырожденных параболических уравнений (см. [11, 12]) следует, что здесь можно поставить начальное условие при $t = 0$ и граничные условия при $\eta = \pm\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{gathered}\partial_t V = \alpha\partial_\eta^2 V + \beta\partial_\eta V + \gamma V, \quad V(\eta, 0) = 0,\\ v\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = p_1(t), \quad v\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = p_2(t).\end{gathered} \tag{3}$$

Домножая уравнение на $e^{\lambda t}$ с некоторой константой λ, можно считать, что $\gamma \le -\gamma_0 < 0$ для некоторой константы γ_0. Далее, вычитая из решения V некоторую гладкую функцию Q, можно свести задачу к однородным граничным условиям. Теперь применимо следствие теоремы 4 из [12]. Итак, существует гладкое решение V задачи (3). Кроме того, для задачи (3) применима теорема 1.1.2 из [11], по которой для решения V выполнен принцип максимума, поэтому из неотрицательности p_1 и p_2 следует неотрицательность V. Проверим, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, t)d\eta = \frac{1}{q(t)} - 1.$$

Имеем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, t)d\eta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \partial_t V d\eta = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \partial_y(\mathcal{B}V)d\eta =\\ = -\mathcal{B}\left(\frac{\pi}{2}\right)V\left(\frac{\pi}{2}, t\right) + \mathcal{B}\left(-\frac{\pi}{2}\right)V\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = p(t).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, t)d\eta - \frac{1}{q(t)}\right) = 0,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\eta, 0)d\eta - \frac{1}{q(0)} = -1.$$

Наконец, отметим, что $v(y,t) = V(\mathrm{arctg}\, y, t)(1 + y^2)^{-1}$ и

$$\begin{gathered}\lim_{y\to+\infty} v(y,t)(1 + y^2) = p_1(t),\\ \lim_{y\to-\infty} v(y,t)(1 + y^2) = p_2(t),\end{gathered}$$

что завершает доказательство.

Пусть теперь $\{p^j\}$ — бесконечный набор гладких линейно независимых неотрицательных функций на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le p^j(t) \le \frac{2p(t)}{\pi}$ для всех t и равенствам $p^j(0) = 0$, $(p^j)^{(k)}(0) = 0$ при всех $k \ge 1$. Для каждой пары

$$p_1(t) = p^j(t), \quad p_2(t) = \frac{2}{\pi}p(t) - p^j(t)$$

с помощью последней леммы построим решение v_2^j и положим

$$v^j(y,t) = v_1(y,t) + v_2^j(y,t).$$

Тогда соответствующие функции

$$\varrho^j(x,y,z,t) = u(x,t)v^j(y,t)w(z,t)$$

(в случае $d = 2$ функции $\varrho^j(x,y,t) = u(x,t)v^j(y,t)$) являются линейно независимыми решениями задачи Коши

$$\partial_t\varrho = L^*\varrho, \quad \varrho|_{t=0} = \delta_{x_0}\otimes\delta_{y_0}\otimes\delta_{z_0}.$$

Обоснуем линейную независимость. По построению

$$\begin{gathered}\lim_{y\to-\infty}(1 + y^2)\iint(\varrho^j(x,y,z,t) -\\ - u(x,t)v_1(y,t)w(z,t))dxdz =\\ = q(t)\lim_{y\to-\infty}(1 + y^2)v_2^j(y,t) = q(t)p^j(t).\end{gathered}$$

Следовательно, линейная зависимость ϱ^j привела бы к линейной зависимости функций p^j, что невозможно.

Теперь рассмотрим случай произвольного начального условия ν. Пусть $a = (x_0, y_0, z_0)$ и ϱ_a^j — построенные выше решения задачи Коши с начальным условием δ_a. Из построения видно, что решения борелевски измеримы по a. Рассмотрим функцию

$$\omega^j(x,y,z,t) = \int\varrho_a^j(x,y,z,t)\nu(da).$$

Ясно, что ω^j является вероятностным решением задачи Коши

$$\partial_t \omega^j = L^* \omega^j, \quad \omega^j|_{t=0} = \nu.$$

Пусть $u_{x_0}(x,t)$, $v_{1,y_0}(y,t)$, $w_{z_0}(z,t)$ – построенные выше функции для начальных условий δ_{x_0}, δ_{y_0}, δ_{z_0}, где $(x_0, y_0, z_0) = a$. Тогда верны равенства

$$\iint \Big(\omega^j(x,y,z,t) \quad - $$
$$-\int u_{x_0}(x,t) v_{1,y_0}(y,t) w_{z_0}(z,t) \nu(da) \Big) dxdz =$$
$$= \iiint (\varrho_a^j(x,y,z,t) -$$
$$- u_{x_0}(x,t) v_{1,y_0}(y,t) w_{z_0}(z,t)) dxdz \nu(da) = q(t) v_2^j(y,t).$$

Умножая

$$\iint \Big(\omega^j(x,y,z,t) -$$
$$- \int u_{x_0}(x,t) v_{1,y_0}(y,t) w_{z_0}(z,t) \nu(da) \Big) dxdz$$

на $(1+y^2)$ и устремляя y к $-\infty$, получаем $q(t)p^j(t)$. Следовательно, линейная независимость p^j влечет линейную независимость ω^j. Таким образом, построено бесконечно много линейно независимых вероятностных решений задачи Коши.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00432 и Московским центром фундаментальной и прикладной математики, третий автор поддержан фондом Саймонса и грантом победителя конкурса “Молодая математика России” и благодарит ее жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. *Колмогоров А.Н.* // В кн. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 149–161.
3. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2015. 480 p.
4. *Феллер В.* // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 57–96.
5. *Yosida K.* // Ark. Mat. 1949. V. 1. P. 71–75.
6. *Hille E.* // J. Analyse Math. 1954. V. 3. P. 81–196.
7. *Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.* // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 22–25.
8. *Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.* // Матем. сб. (принято в печать).
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
10. *Красовицкий Т.И.* // ДАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 361–364.
11. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: Изд-во МГУ, 2010. 359 с.
12. *Фатеева Г.М.* // Матем. сб. 1968. Т. 76. № 4. С. 537–565.

ON NON-UNIQUENESS OF PROBABILITY SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FOKKER–PLANCK–KOLMOGOROV EQUATION

V. I. Bogachev[a,b,c,d], T. I. Krasovitskii[a,d], and S. V. Shaposhnikov[a,b,d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

[c] *St.-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*

[d] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev

In this paper we give a positive answer to the question about the possibility of existence of several probability solutions to the Fokker–Planck–Kolmogorov equation for all initial conditions: we have constructed the first example of an equation with the unit diffusion matrix and a smooth drift coefficient for which the Cauchy problem with every probability initial condition has an infinite-dimensional simplex of probability solutions.

Keywords: Fokker–Planck–Kolmogorov equation, Cauchy problem, uniqueness of a probability solution