ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 21–26

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

КВАНТОВЫЕ ГРАФЫ С МАЛЫМИ РЕБРАМИ: ГОЛОМОРФНОСТЬ РЕЗОЛЬВЕНТ

© 2021 г. Д. И. Борисов[1,2,3,*]

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым 30.03.2021 г.
Поступило 30.03.2021 г.
После доработки 30.03.2021 г.
Принято к публикации 05.04.2021 г.

Рассматривается скалярный самосопряженный эллиптический оператор второго порядка общего вида с общими краевыми условиями на произвольном метрическом графе, содержащий подграф, длины ребер которого пропорциональны малому параметру. Показано, что резольвента такого оператора голоморфна по малому параметру, и приводятся ее представления в виде рядов Тейлора. Коэффициенты рядов удается найти достаточно явно.

Ключевые слова: граф, малое ребро, резольвента, голоморфность по малому параметру

DOI: 10.31857/S268695432103005X

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теория квантовых графов, а именно, теория эллиптических операторов на метрических графах, достаточно активно развивается, и одним из направлений является теория возмущений для таких операторов. Графы допускают специфическое возмущение геометрического характера — наличие малых ребер. Влияние таких ребер на резольвенты и спектры рассматриваемых эллиптических операторов исследовалось ранее с точки зрения установления сходимости резольвенты к резольвенте некоторого предельного оператора на предельном графе или множестве, см., например, [1–3]. Общие результаты о резольвентной сходимости операторов Шрёдингера на графах с малыми ребрами были недавно опубликованы в статье [1]. Эта статья мотивировала настоящую работу, и нашей целью являются рассмотрение общих эллиптических скалярных операторов второго порядка на графах с малыми ребрами и детальное изучение зависимости их резольвент от длин малых ребер. Частные результаты такого характера для простейших модельных графов были получены в [5, 6].

Опишем постановку задачи. Пусть Γ — метрический граф с конечным числом ребер и вершин, не имеющий изолированных вершин. Ребра могут иметь конечную или бесконечную длину. Выберем произвольно вершину $M_0 \in \Gamma$ и через e_i^0, $i = 1,\dots,d_0$, обозначим ребра, выходящие из M_0, причем петли пересчитываются дважды. Через γ обозначим еще один метрический конечный граф с ребрами конечной длины, а через γ_ε — граф, полученный из γ сжатием каждого из ребер в ε^{-1} раз с сохранением структуры и вершин графа, где ε — малый положительный параметр. Выберем произвольный набор вершин M_j, $j = 1,\dots,n$, в графе γ_ε, где $n \le d_0$, и произвольно разобьем ребра e_i^0, $i = 1,\dots,d_0$, на n непустых групп $\{\mathrm{e}_i^0\}_{i\in J_j}$, $j = 1,\dots,n$, J_j — соответствующие множества индексов. Вершину M_0 заменим на n ее копий, по одной для каждой из групп $\{\mathrm{e}_i^0\}_{i\in J_j}$, и каждую копию отождествим с вершиной M_j в графе γ_ε. В результате получим новый граф, обозначаемый символом Γ_ε, который возник в результате описанного приклеивания графа γ_ε с малыми ребрами к исходному графу Γ. На каждом из ребер всех рассматриваемых графов произвольно выберем направление и соответствующую ему переменную. Далее мы отождествляем исходные графы Γ и γ_ε с соответствующими подграфами в графе Γ_ε.

[1] *Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*

[2] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия*

[3] *Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика*

**E-mail: borisovdi@yandex.ru*

Настоящая работа посвящена исследованию оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}}(\varepsilon) := -\frac{d}{dx}V_\varepsilon^{(2)}\frac{d}{dx} + \mathrm{i}\left(\frac{d}{dx}V_\varepsilon^{(1)} + V_\varepsilon^{(1)}\frac{d}{dx}\right) + V_\varepsilon^{(0)},$$
$$V_\varepsilon^{(i)} := V_\Gamma^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1}$$
$$V_\varepsilon^{(i)} := \varepsilon^{i-2}\mathcal{S}_\varepsilon V_\gamma^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \quad \text{на} \quad \gamma_\varepsilon,$$

где $V_\Gamma^{(i)} \in W_\infty^1(\Gamma)$, $V_\gamma^{(i)} \in W_\infty^1(\gamma)$, $i = 1, 2$, $V_\Gamma^{(0)} \in L_2(\Gamma)$, $V_\gamma^{(1)} \in L_2(\gamma)$ – вещественные функции, голоморфные по ε в норме указанных пространств, $\mathcal{S}_\varepsilon$: $L_2(\gamma) \to L_2(\gamma_\varepsilon)$ – линейный оператор, действующий по правилу $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathrm{e}_\varepsilon$ на каждом ребре $\mathrm{e}_\varepsilon \in \gamma_\varepsilon$, и выполнено условие эллиптичности: $V_\varepsilon^{(2)}(x,\varepsilon) \geq c_{\mathcal{H}} > 0$ на Γ_ε, где $c_{\mathcal{H}}$ – константа, не зависящая от x и ε.

Краевые условия в произвольной вершине $M \in \Gamma_\varepsilon$, из которой выходят ребра $\mathrm{e}_i(M)$, $i = 1, \ldots, d(M)$, задаем следующим образом. Пусть $u_i := u|_{\mathrm{e}_i(M)}$, $i = 1,\ldots,d(M)$ – сужения заданной на Γ_ε функции u на ребра $\mathrm{e}_i(M)$ и

$$\mathcal{U}_M(u) := \begin{pmatrix} u_1(M) \\ \vdots \\ u_{d(M)}(M) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}'_M(u) := \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx_1}(M) \\ \vdots \\ \frac{du_{d(M)}}{dx_{d(M)}}(M) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где x_i – переменная на ребре $\mathrm{e}_i(M)$. В вершине M затем задается краевое условие общего вида

$$\mathrm{A}_M(\varepsilon)\mathcal{U}_M(u) + \mathrm{B}_M(\varepsilon)\mathcal{U}'_M(u) = 0, \tag{3}$$

где $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$ и $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$ – заданные матрицы размера $d(M) \times d(M)$, голоморфные по ε. Предполагается, что матрица

$$\mathrm{i}\mathrm{B}_M(\varepsilon)(\mathrm{V}_M^{(2)}(\varepsilon))^{-1}\mathrm{V}_M^{(1)}(\varepsilon)(\mathrm{V}_M^{(2)}(\varepsilon))^{-1}\mathrm{B}_M^*(\varepsilon) +$$
$$+ \mathrm{A}_M(\varepsilon)(\mathrm{V}_M^{(2)}(\varepsilon))^{-1}\mathrm{B}_M^*(\varepsilon)$$

самосопряжена, где обозначено

$$\mathrm{V}_M^{(j)}(\varepsilon) := \operatorname{diag}\{\nu_i(M)V_\varepsilon^{(j)}|_{\mathrm{e}_i(M)}(M)\}_{i=1,\ldots,d(M)}, \tag{4}$$

$\nu_i(M) := 1$, если направление от вершины M на ребре $\mathrm{e}_i(M)$ совпадает с выбранным направлением на этом ребре и $\nu_i(M) := -1$ иначе.

Матрицы $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$ и $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$ в (3) определены с точностью до умножения слева на произвольную невырожденную квадратную матрицу размера $d(M) \times d(M)$. Поэтому, обозначив $r(M) := \operatorname{rank}\mathrm{B}_M(0)$, далее предполагаем, что первые $r(M)$ строк матрицы $\mathrm{B}_M(0)$ линейно независимы, а остальные строки обращаются в нуль, а каждая из последних $d(M) - r(M)$ строк матрицы $\mathrm{A}_M(0)$ не равна нулю. Также налагаем следующее условие: $\operatorname{rank}(\mathrm{A}_M(0)\mathrm{B}_M(0)) = d(M)$.

Область определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ состоит из функций из $\dot{W}_2^2(\gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющих краевым условиям (3), где обозначено $\dot{W}_2^j(\cdot) := \bigoplus_{\mathrm{e}\in\cdot} W_2^j(\mathrm{e})$, $j = 1, 2$. Действие оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ на таких функциях определяется дифференциальным выражением (1). Описанные условия на функции $V_\Gamma^{(i)}$, $V_\gamma^{(i)}$ и матрицы A_M, B_M являются критерием самосопряженности оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Через γ_∞ обозначим граф, полученный приклеиванием полубесконечных ребер e_i^∞, $i \in J_j$, $j = 1,\ldots,n$, к вершинам M_j, $j = 1,\ldots,n$, графа γ, считая данные вершины началами ребер e_i^∞. Переменную на графе γ_∞ обозначим через ξ и рассмотрим на нем оператор $\mathcal{H}_\gamma$ с дифференциальным выражением:

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma := -\frac{d}{d\xi}V_{\gamma,0}^{(2)}\frac{d}{d\xi} + \mathrm{i}\left(\frac{d}{d\xi}V_{\gamma,0}^{(1)} + V_{\gamma,0}^{(1)}\frac{d}{d\xi}\right) + V_{\gamma,0}^{(0)} \quad \text{на} \quad \gamma,$$
$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma := -\nu_i\frac{d^2}{d\xi^2} \quad \text{на} \quad \mathrm{e}_i^\infty, \quad i \in J_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$
$$V_{\gamma,0}^{(i)}(\xi) := V_\gamma^{(i)}(\xi,0), \qquad \nu_i := V_\Gamma^{(2)}|_{\mathrm{e}_i^0}(M_0,0),$$

и краевыми условиями в вершинах $M \in \gamma_\infty$:

$$\mathrm{A}_M^{(0)}\mathcal{U}_M(u) + \mathrm{B}_M^{(0)}\mathcal{U}'_M(u) = 0, \tag{5}$$

где векторы $\mathcal{U}_M(u)$ и $\mathcal{U}'_M(u)$ вводятся также, как и в (2) с заменой производных $\frac{du_i}{dx_i}$ на $\frac{du_i}{d\xi_i}$, а матрицы имеют вид

$$\mathrm{A}_M^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{A}_M^-(0) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}_M^{(0)} := \begin{pmatrix} \mathrm{B}_M^+(0) \\ \frac{d\mathrm{B}_M^-}{d\varepsilon}(0) \end{pmatrix}$$
$$\text{при} \quad \mathrm{B}_M(0) \neq 0,$$
$$\mathrm{A}_M^{(0)} := \mathrm{A}_M(0), \quad \mathrm{B}_M^{(0)} := \frac{d\mathrm{B}_M}{d\varepsilon}(0) \quad \text{при} \quad \mathrm{B}_M(0) = 0.$$

Здесь A_M^+ и B_M^+ – матрицы, состоящие из первых $r(M)$ строк матриц A_M и B_M, соответственно, а матрицы A_M^- и B_M^- образованы оставшимися $d(M) - r(M)$ строками матриц A_M и B_M. Область определения оператора $\mathcal{H}_\gamma$ состоит из функций из

$\dot{W}_2^2(\gamma)$, удовлетворяющих краевым условиям (5). Оператор $\mathcal{H}_\gamma$ самосопряжен. С учетом структуры графа γ_∞ и вида дифференциального выражения $\hat{\mathcal{H}}_\gamma$ на ребрах e_i^∞, существенный спектр оператора $\mathcal{H}_\gamma$ совпадает с полупрямой $[0,+\infty)$.

Основное и по сути единственное условие, которое мы налагаем в работе, звучит следующим образом:

(A) край существенного спектра оператора $\mathcal{H}_\gamma$ не является собственным значением.

Данное условие эквивалентно тому, что задача для уравнения

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma \psi = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_\infty \tag{6}$$

с условиями (5) не имеет нетривиальных решений из $\dot{W}_2^2(\gamma) \oplus \bigoplus\limits_{i=1,\dots,d_0} W_{2,loc}^2(e_i^\infty)$, которые бы тождественно обращались в нуль на ребрах e_i^∞. При этом задача (5), (6) может иметь нетривиальные решения из $\dot{W}_2^2(\gamma) \oplus \bigoplus\limits_{i=1,\dots,d_0} W_{2,loc}^2(e_i^\infty)$, которые постоянны на ребрах e_i^∞. В терминах оператора $\mathcal{H}_\gamma$ это означает, что он может иметь виртуальный уровень на краю существенного спектра.

Пусть $\psi^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$, – линейно независимые ограниченные нетривиальные решения задачи (5), (6), не равные тождественно нулю на ребрах e_i^∞. Ясно, что в силу условия (A) выполнено неравенство $k \le d_0$. Если таких решений нет, то полагаем $k = 0$.

Для произвольной функции u, заданной и непрерывной на ребрах e_i^∞ в окрестности вершин M_j, обозначим

$$\mathcal{U}_\gamma(u) := \left(u\big|_{e_i^\infty}(M_j)\right)_{i\in J_j,\, j=1,\dots,n},$$

где $u\big|_{e_i^\infty}$ – сужение u на ребро e_i^∞. В силу своего определения функции $\psi^{(j)}$ удовлетворяют условию $\Psi^{(j)} := \mathcal{U}_\gamma(\psi^{(j)}) \ne 0$, $j = 1,\dots,k$. Выберем функции $\psi^{(j)}$ так, чтобы вектора $\Psi^{(j)}$ были ортонормированы в $\mathbb{C}^{d_0}$. Если $k < d_0$, то дополнительно произвольно выберем векторы $\Psi^{(j)} \in \mathbb{C}^{d_0}$, $j = k+1, \dots, d_0$, так, что набор $\Psi^{(j)} \in \mathbb{C}^{d_0}$, $j = 1, \dots, d_0$, образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}^{d_0}$, а матрица $\Psi := (\Psi^{(1)} \dots \Psi^{(k)}\ \Psi^{(k+1)} \dots \Psi^{(d_0)})$ унитарна.

Для каждой вершины $M \in \gamma_\infty$ определим матрицы:

$$\mathrm{A}_M^{(1)} := \begin{pmatrix} \mathrm{A}_M^+(0) \\ \dfrac{d\mathrm{A}_M^-}{d\varepsilon}(0) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}_M^{(1)} := \begin{pmatrix} \dfrac{d\mathrm{B}_M^+}{d\varepsilon}(0) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\mathrm{B}_M^-}{d\varepsilon^2}(0) \end{pmatrix}$$
$$\text{при} \quad \mathrm{B}_M(0) \ne 0,$$

$$\mathrm{A}_M^{(1)} := \frac{d\mathrm{A}_M}{d\varepsilon}(0), \quad \mathrm{B}_M^{(1)} := \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{B}_M}{d\varepsilon^2}(0)$$
$$\text{при} \quad \mathrm{B}_M(0) = 0,$$
$$\tilde{\mathrm{A}}_M^{(0)} := \mathrm{A}_M^{(0)} + \mathrm{i}\mathrm{B}_M^{(0)}(\mathrm{V}_{M,}^{(2)}(0))^{-1}\mathrm{V}_{M,}^{(1)}(0),$$
$$\tilde{\mathrm{B}}_M^{(0)} := \mathrm{B}_M^{(0)}(\mathrm{V}_{M,}^{(2)}(0))^{-1},$$

$$\mathrm{U}_M^{(0)} = -(\tilde{\mathrm{A}}_M^{(0)} - \mathrm{i}\tilde{\mathrm{B}}_M^{(0)})^{-1}(\tilde{\mathrm{A}}_M^{(0)} + \mathrm{i}\tilde{\mathrm{B}}_M^{(0)}),$$
$$\mathcal{Q}_M(\psi) := 2\mathrm{i}(\mathrm{A}_M^{(0)} - \mathrm{i}\mathrm{B}_M^{(0)})^{-1}(\mathrm{A}_M^{(1)}\mathcal{U}_M(\psi) + \mathrm{B}_M^{(1)}\mathcal{U}'_M(\psi)),$$
$$\mathrm{V}_{\gamma,M}^{(j)}(\varepsilon) := \operatorname{diag}\{\nu_i(M)V_\gamma^{(j)}\big|_{e_i(M)}(M,\varepsilon)\}_{i=1,\dots,d(M)},$$

где $e_i(M)$ – ребра, выходящие из вершины M, числа $\nu_i(M)$ определяются как и в (4), а функции $V_\gamma^{(j)}$ считаем продолженными на ребра e_i^∞, $i \in J_j$, $j = 1, \dots, n$, по формулам $V_\gamma^{(2)}(\cdot,\varepsilon) \equiv \mathrm{v}_i^{(2)}(\varepsilon)$, $V_\gamma^{(1)}(\cdot,\varepsilon) \equiv \varepsilon \mathrm{v}_i^{(1)}(\varepsilon)$.

Матрица $\mathrm{U}_M^{(0)}$ унитарна. Через $\mathrm{P}_M^{(0)}$ обозначим проектор в $\mathbb{C}^{d(M)}$ на собственное подпространство матрицы $\mathrm{U}_M^{(0)}$, соответствующее собственному значению -1, и пусть $\mathrm{P}_{M,\perp}^{(0)} := \mathrm{E}_{d(M)} - \mathrm{P}_M^{(0)}$. Через Q обозначим самосопряженную матрицу размера $k \times k$ с элементами

$$Q^{(ij)} := Q_\gamma^{(ij)} + \sum_{M\in\gamma_\infty} Q_M^{(ij)},$$

$$Q_\gamma^{(ij)} := \left(\frac{dV_\gamma^{(2)}}{d\varepsilon}(\cdot,0)\frac{d\psi^{(i)}}{d\xi}, \frac{d\psi^{(j)}}{d\xi}\right)_{L_2(\gamma)} +$$
$$+ \left(\frac{d\psi^{(i)}}{d\xi}, \mathrm{i}\frac{dV_\gamma^{(1)}}{d\varepsilon}(\cdot,0)\psi^{(j)}\right)_{L_2(\gamma)} +$$
$$+ \left(\mathrm{i}\frac{dV_\gamma^{(1)}}{d\varepsilon}(\cdot,0)\psi^{(i)}, \frac{d\psi^{(j)}}{d\xi}\right)_{L_2(\gamma)} + \left(\frac{dV_\gamma^{(0)}}{d\varepsilon}(\cdot,0)\psi^{(i)}, \psi^{(j)}\right)_{L_2(\gamma)},$$

$$Q_M^{(ij)} := (\mathrm{q}_M^{(i)}, \mathcal{U}_M(\psi^{(j)}))_{\mathbb{C}^{d(M)}} -$$
$$- \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathcal{Q}_M(\psi^{(i)}), \mathcal{V}_{\gamma,M}^{(0)}(\psi^{(j)}))_{\mathbb{C}^{d(M)}},$$

$$\mathrm{q}_M^{(i)} := \frac{d\mathrm{V}_{\gamma,M}^{(2)}}{d\varepsilon}(0)\,\mathcal{U}'_M(\psi^{(i)}) - \mathrm{i}\frac{d\mathrm{V}_{\gamma,M}^{(1)}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}_M(\psi^{(i)}) +$$
$$+ (\mathrm{U}_M^{(0)} + \mathrm{E}_{d(M)})^{-1}\mathrm{P}_{M,\perp}^{(0)}\mathcal{Q}_M(\psi^{(i)}),$$
$$\mathcal{V}_{\gamma,M}^{(0)}(\cdot) := \mathrm{V}_{\gamma,M}^{(2)}(0)\,\mathcal{U}'_M(\cdot) - \mathrm{i}\mathrm{V}_{\gamma,M}^{(1)}(0)\mathcal{U}_M(\cdot).$$

Определим еще две блочные матрицы размера $d_0 \times d_0$:

$$\mathrm{A}^{(0)}_{M_0} := \begin{pmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & \mathrm{E}_{d_0-k} \end{pmatrix} \Psi^* + \mathrm{i} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi^* \, \mathrm{V}^{(1)}_{\Gamma,M_0}(0),$$
$$\mathrm{B}^{(0)}_{M_0} := -\begin{pmatrix} \mathrm{E}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi^* \, \mathrm{V}^{(2)}_{\Gamma,M_0}(0), \tag{7}$$

где символом E_p обозначаем единичные матрицы размера $p \times p$, символ 0 в первой строке матрицы A_{M_0} обозначает матрицу размера $k \times (d_0 - k)$, а во второй строке – матрицу размера $(d_0 - k) \times k$. Символами 0 в определении матрицы B_{M_0} обозначаем нулевые матрицы соответственно размеров $k \times (d_0 - k)$, $(d_0 - k) \times k$ и $(d_0 - k) \times (d_0 - k)$. Матрицы $\mathrm{V}^{(j)}_{\Gamma,M_0}$, $j = 1, 2$, задаются равенством

$$\mathrm{V}^{(j)}_{\Gamma,M_0}(\varepsilon) := \mathrm{diag}\{\nu_i(M_0) V^{(j)}_{\Gamma}|_{e_i^0}(M, \varepsilon)\}_{i=1,\ldots,d_0},$$

где числа $\nu_i(M_0)$ вводятся согласно (4).

Пусть $\mathcal{H}_0$ – оператор на графе Γ с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}}_0 := -\frac{d}{dx} V_0^{(2)} \frac{d}{dx} + \mathrm{i}\left(\frac{d}{dx} V_0^{(1)} + V_0^{(1)} \frac{d}{dx}\right) + V_0^{(0)},$$

$V_0^{(i)} := V_\Gamma^{(i)}(\cdot, 0)$, с краевыми условиями

$$\mathrm{A}^{(0)}_M \mathcal{U}_M(u) + \mathrm{B}^{(0)}_M \mathcal{U}'_M(u) = 0 \quad \text{в} \quad M \in \Gamma, \tag{8}$$

где матрицы $\mathrm{A}^{(0)}_{M_0}$, $\mathrm{B}^{(0)}_{M_0}$ заданы в (7), а для $M \neq M_0$ они вводятся формулами $\mathrm{A}^{(0)}_M := \mathrm{A}_M(0)$, $\mathrm{B}^{(0)}_M := \mathrm{B}_M(0)$. Оператор $\mathcal{H}_0$ действует в $L_2(\Gamma)$ на области определения, состоящей из функций из $\dot{W}_2^2(\Gamma)$, удовлетворяющих краевым условиям (8). Данный оператор самосопряжен.

Пусть $\mathcal{P}_\Gamma$: $L_2(\Gamma_\varepsilon) \to L_2(\Gamma)$ и $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}$: $L_2(\Gamma_\varepsilon) \to L_2(\gamma_\varepsilon)$ операторы сужения на подграфы Γ и γ_ε в Γ, действующие на каждую $f \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$ по правилам $\mathcal{P}_\Gamma f := f|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f|_{\gamma_\varepsilon}$. В смысле прямой суммы $L_2(\Gamma_\varepsilon) = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma_\varepsilon)$ для этих операторов верно равенство

$$\mathcal{P}_\Gamma \oplus \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} = \mathcal{I}_{\Gamma_\varepsilon}, \tag{9}$$

где $\mathcal{I}_{\Gamma_\varepsilon}$ – тождественный оператор в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$.

Так как оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ самосопряжен, то для каждого $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ его резольвента $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ корректно определена, что позволяет определить еще пару операторов

$$\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda) := \mathcal{P}_\Gamma (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} (\mathcal{I}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon^{-1}),$$
$$\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda) := \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} (\mathcal{I}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon^{-1}),$$

линейных и ограниченных как действующих из $L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$ в $\dot{W}_2^2(\Gamma)$ и $\dot{W}_2^2(\gamma)$ соответственно. Здесь прямые суммы понимаются в смысле равенства (9), а исходная резольвента оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ легко восстанавливается с помощью введенных операторов по формуле

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} = \\ = (\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda) \oplus \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda))(\mathcal{P}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}). \tag{10}$$

Определим еще один оператор $\mathcal{R}_\gamma^{(0)}(\lambda)$: $L_2(\Gamma) \to \to \dot{W}_2^2(\gamma)$, действующий по правилу

$$\mathcal{R}_\gamma^{(0)}(\lambda) f := \sum_{i=1}^{k} c_i(f) \psi^{(i)},$$
$$\begin{pmatrix} c_1(f) \\ \vdots \\ c_k(f) \end{pmatrix} := \Psi_0^* \mathcal{U}_{M_0}((\mathcal{H}_\Gamma - \lambda)^{-1} f),$$

где $\Psi_0 := (\Psi^{(1)} \ldots \Psi^{(k)})$. Введем следующие пространства непрерывных функций на графах:

$$\dot{C}(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} C(\overline{e}) \cap L_\infty(e), \quad \dot{C}^1(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} C^1(\overline{e}) \cap W^1_\infty(e),$$
$$\dot{C}^2(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} C^1(\overline{e}) \cap W^2_\infty(e), \quad \|u\|_{\dot{C}^i(\cdot)} := \sum_{e \in \cdot} \|u\|_{W^i_\infty(e)},$$

где считаем $\dot{C}^0 := \dot{C}$. Если функции $V_\Gamma^{(i)}$ и $V_\gamma^{(i)}$ имеют гладкость $V_\Gamma^{(i)} \in \dot{C}^1(\Gamma)$, $V_\gamma^{(i)} \in \dot{C}^1(\gamma)$, $i = 1, 2$, $V_\Gamma^{(0)} \in \dot{C}(\Gamma)$, $V_\gamma^{(0)} \in \dot{C}(\gamma)$ и голоморфны по ε в норме этих пространств, то тогда полагаем

$$\dot{C}^2(\cdot) := \bigoplus_{e \in \cdot} C^2(\overline{e}) \cap W^2_\infty(e).$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены описанные выше условия на функции* $V_\Gamma^{(i)}$, $V_\gamma^{(i)}$ *и матрицы* $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$, $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$ *и выполнено условие* (A). *Тогда для любого* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *существует* $\varepsilon_0(\lambda) > 0$, *такое что при* $\varepsilon < \varepsilon_0(\lambda)$ *операторы* $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda)$ *и* $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda)$ *ограничены и голоморфны по* ε *как действующие из* $L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$ *в* $\dot{W}_2^2(\Gamma) \cap \dot{C}^2(\Gamma)$ *и* $\dot{W}_2^2(\gamma) \cap \dot{C}^2(\gamma)$. *Первые члены рядов Тейлора этих операторов имеют вид*

$$\mathcal{R}_\Gamma(0, \lambda) = (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{P}_\Gamma, \quad \mathcal{R}_\gamma(0, \lambda) = \mathcal{R}_\gamma^{(0)}(\lambda) \mathcal{P}_\Gamma. \tag{11}$$

Поясним действие операторов $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon, \lambda)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon, \lambda)$. Пусть $f \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$, $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ и рассмотрим сужения этих функций на подграфы Γ и γ_ε; сужения на γ_ε дополнительно будем рассматривать как функции переменной $\xi := x\varepsilon^{-1}$, $\xi \in \gamma$.

Эти сужения очевидно имеют вид $\mathcal{R}_\Gamma f$, $\mathcal{P}_\Gamma u_\varepsilon$ и $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f$, $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon$. Операторы $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)$ отображают пару $(\mathcal{P}_\Gamma f, \mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f)$ соответственно в $\mathcal{P}_\Gamma u_\varepsilon$ и $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon$. С учетом формулы (10) их можно рассматривать как части резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$, соответствующие подграфам Γ и γ_ε. Теорема 1 утверждает голоморфность по ε этих частей, а формулы (11) дают первые члены их рядов Тейлора.

Нам также удалось разработать эффективный рекуррентный алгоритм определения всех коэффициентов рядов Тейлора для операторов $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)$. А именно, для произвольной пары функций $(f_\Gamma, f_\gamma) \in L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$ данные ряды Тейлора имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma) &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\Gamma, \quad u_0^\Gamma := (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f_\Gamma, \\ \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma) &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\gamma, \quad u_0^\gamma := \sum_{i=1}^{k} c_i(f_\Gamma)\psi^{(i)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где функции u_p^Γ и u_p^γ являются решениями рекуррентной системы однозначно разрешимых краевых задач на Γ и γ соответственно. В этих задачах уравнения на u_p^Γ и u_p^γ описываются с помощью дифференциальных выражений $\hat{\mathcal{H}}_0$ и $\hat{\mathcal{H}}_\gamma$ соответственно. Правые части уравнений и краевые условия для функций u_p^Γ зависят только от функций u_q^Γ, $q < p$, а аналогичные правые части для функций u_p^γ – от функций u_q^γ, $q < p$. Краевые условия в вершине M_0 для функций u_p^Γ определяются функциями u_p^γ, а краевые условия в вершинах M_j для функций u_p^γ – функциями u_{p-1}^Γ. Последовательно решая эти краевые задачи, можно найти все функции u_p^Γ и u_p^γ.

Наша схема построения коэффициентов рядов Тейлора (12) по сути является адаптацией метода согласования асимптотических разложений [7] для графов. Наша работа первая, где этот метод применяется для исследования квантовых графов. Отдельно следует подчеркнуть, что наличие малых ребер в графе является сингулярным возмущением. Вместе с тем, в отличие от большинства задач с сингулярными возмущениями, см., например, модели в [7], получающиеся здесь асимптотические ряды для решения одновременно оказываются равномерно сходящимися по параметру рядами Тейлора, что весьма редкий случай в сингулярно возмущенных краевых задачах.

Наличие рядов Тейлора (12) и формула (10) позволяют найти представление для резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ в виде равномерно сходящегося ряда, частичные суммы которого дают сколько угодно точные аппроксимации резольвенты. Данный результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. *В предположениях теоремы* 1, *резольвента* $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ *представляется равномерно сходящимся в* $\dot{W}_2^2(\Gamma_\varepsilon)$ *и* $\dot{C}^2(\Gamma_\varepsilon)$ *рядом*

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon^{-1} u_p^\gamma, \quad f \in L_2(\Gamma_\varepsilon),$$

где функции u_p^Γ и u_p^γ – *коэффициенты рядов Тейлора* (12) *с* $f_\Gamma := \mathcal{P}_\Gamma f$, $f_\gamma := \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f$. *Для* $N \in \mathbb{Z}_+$ *верны оценки*:

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\Gamma \right\|_{\dot{W}_2^2(\Gamma)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\Gamma \right\|_{\dot{C}^2(\Gamma)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \right\|_{\dot{W}_2^i(\gamma_\varepsilon)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N+1-i} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\left\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \right\|_{\dot{C}^i(\gamma_\varepsilon)} \leq C^{N+1} \varepsilon^{N-i+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},$$

где $i = 0, 1, 2$, *а* C – *константа, не зависящая от* ε, N *и* f.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berkolaiko G., Latushkin Yu., Sukhtaiev S.* // Adv. Math. 2019. V. 352. P. 632–669.
2. *Cacciapuoti C.* // Symmetry. 2019. V. 11. № 3. id 359.
3. *Cheon T., Exner P., Turek O.* // Ann. Phys. 2010. V. 325. № 3. P. 548–578.
4. *Комаров А.В., Пенкин О.М., Покорный Ю.В.* // ДАН. 2003. Т. 390. № 2. С. 151–153.
5. *Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И.* // Пробл. матем. ан. 2020. Вып. 106. С. 17–42.
6. *Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н.* // Уфимский матем. журн. 2019. Т. 11. № 2. С. 56–71.
7. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

QUANTUM GRAPHS WITH SMALL EDGES: HOLOMORPHY OF RESOLVENTS

D. I. Borisov[a,b,c]

[a] *Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, Russian Federation*
[b] *Bashkir State Pedagogical University named after M. Akhmulla, Ufa, Russian Federation*
[c] *Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic*
Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

We consider a scalar self-adjoint general elliptic second order operator with general boundary conditions on an arbitrary metric graph containing a subgraph with edges of lengths proportional to a small parameter. We show that the resolvent of such operator is holomorphic in the small parameter and provide its representations by Taylor series. The coefficients of the series are found rather explicitly.

Keywords: graph, small edge, resolvent, holomorphy in a small parameter