ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 27–30

МАТЕМАТИКА

УДК 519.216.8, 517.977.54, 517.983.23

О МЕТОДЕ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ НА МАРТИНГАЛАХ

© 2021 г. В. А. Боровицкий[1,2], Н. Н. Осипов[1,3,*], А. С. Целищев[1,2]

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым 12.03.2021 г.
Поступило 19.03.2021 г.
После доработки 19.03.2021 г.
Принято к публикации 06.04.2021 г.

Показано, как применить метод функции Беллмана к заданным на мартингалах операторам общего вида, т.е. к операторам, которые не обязательно являются мартингальными преобразованиями. В качестве примеров таких операторов рассмотрены преобразования Хаара и оператор, к вопросу об L^p-ограниченности которого сводится доказательство неравенства Рубио де Франсиа для системы Уолша. Для соответствующей функции Беллмана проведена беллмановская индукция и построен беллмановский кандидат.

Ключевые слова: метод Буркхольдера, теорема Ганди, система Уолша, неравенство Рубио де Франсиа, преобразование Хаара

DOI: 10.31857/S2686954321030061

Мы будем рассматривать функции, действующие на единичном интервале, и для краткости писать L^p вместо $L^p([0,1])$ и $L^p(l^2)$ вместо $L^p([0,1],\, l^2)$ (во втором случае речь идет об l^2-значных функциях, заданных на единичном интервале).

1. МОТИВИРОВОЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

В работе [1] Д.Л. Буркхольдер применяет метод функции Беллмана, заимствованный из теории оптимального управления, для получения точных L^p-оценок мартингальных преобразований ($1 < p \le 2$). Прежде всего мы приведем два примера операторов, заданных на мартингалах, но при этом не являющихся мартингальными преобразованиями.

Символом “$\sqsubseteq$” будем обозначать отношение “является диадическим подынтервалом”, а через $J^\pm$ будем обозначать левую и правую половины интервала J. Рассмотрим систему Хаара

$$h_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1_{[0,1]} \quad \text{и} \quad h_J \stackrel{\text{def}}{=} |J|^{-1/2}(1_{J^+} - 1_{J^-}), \quad J \sqsubseteq [0,1].$$

Нетрудно видеть, что для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ можно определить унитарный оператор

$$H_m : L^2 \to L^2,$$

который устанавливает взаимно однозначное соответствие между

$$\{h_0, h_J\}_{\substack{J \sqsubseteq [0,1] \\ |J| \ge 2^{-m}}} \quad \text{и} \quad \{1_e\}_{\substack{e \sqsubseteq [0,1] \\ |e| = 2^{-m-1}}},$$

остальные базисные функции Хаара переводит в себя, и при этом обладает свойством

$$\operatorname{supp} H_m h_J \subseteq J \quad \text{для всех} \quad J \sqsubseteq [0,1].$$

Отметим, что матрица в базисе Хаара, которая определяет действие оператора H_m на первых 2^{m+1} базисных векторах, совпадает с матрицей преобразования Хаара порядка 2^{m+1} со столбцами, переставленными подходящим образом. Как мы увидим ниже, для $1 < p \le 2$ равномерная по m L^p-ограниченность операторов H_m может быть установлена в рамках классической теории операторов на мартингалах (“дискретной” версии теории операторов типа Кальдерона–Зигмунда). Однако функция Беллмана, построенная Буркхольдером в [1], не позволяет получить такую ограниченность.

[1] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Исследовательская лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербург, Россия
[3] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Международная лаборатория теории игр и принятия решений, Санкт-Петербург, Россия
**E-mail: nicknick@pdmi.ras.ru*

Приведем другой пример. Пусть $\mathcal{W} = \{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — стандартно упорядоченная система Уолша. Такая система, состоящая из всех возможных произведений функций Радемахера, по своим свойствам напоминает базис Фурье из экспонент и в определенном смысле может рассматриваться как его дискретный аналог (подробности см., например, в [2, § 4.5]). Одним из примеров, подтверждающих такую аналогию, является следующий результат работы [3], который говорит о том, что неравенство Рубио де Франсиа [4] можно перенести с базиса Фурье на систему Уолша.

Т е о р е м а. *Пусть $\{f_m\}$ — не более чем счетный набор функций, спектры Уолша которых лежат в попарно непересекающихся интервалах $I_m \subseteq \mathbb{Z}_+$:*

$$f_m = \sum_{n\in I_m} (f_m, w_n) w_n.$$

Если $1 < p \le 2$, то

$$\left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p} \le C_p \|\{f_m\}\|_{L^p(l^2)},$$

где константа C_p не зависит от наборов $\{f_m\}$ и $\{I_m\}$.

Доказательство этой теоремы в [3] с помощью комбинаторных рассуждений сводится к проверке L^p-ограниченности оператора, который будет нашим вторым примером. Прежде чем описывать этот оператор, мы приведем два простых и хорошо известных свойства функций Уолша.

1. Для функции $g \in L^1$ ее мартингальные разности $\Delta_k g$ в стандартной диадической фильтрации совпадают с мультипликаторами Уолша для отрезков $\delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$ и $\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \{2^{k-1},\ldots,2^k - 1\}$, $k > 0$:

$$\Delta_0 g = (g, h_0) h_0 = (g, w_0) w_0;$$

$$\Delta_k g = \sum_{\substack{J\sqsubseteq[0,1]\\ |J|=2^{-k+1}}} (g, h_J) h_J = \sum_{n\in\delta_k} (g, w_n) w_n.$$

2. Для $a, b \in \mathbb{Z}_+$ выполняется "экспоненциальное" свойство $w_a(x) w_b(x) = w_{a\dot{+}b}(x)$, где $a \dot{+} b$ — побитовое XOR (соответствующие биты в двоичном разложении a и b суммируются по модулю 2). Другими словами, имеет место изоморфизм между двумя группами: $(\mathbb{Z}_+, \dot{+}) \cong (\mathcal{W}, \times)$.

Пусть мультииндексы (j, k) пробегают некоторое подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}_+^2$, и пусть числа $a_{j,k} \in \mathbb{Z}_+$ такие, что множества $a_{j,k} \dot{+} \delta_k$ попарно не пересекаются и полностью покрывают $\mathbb{Z}_+$. Мы рассмотрим оператор G, который размещает в этих множествах части спектров Уолша функций из последовательности $f = \{f_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathcal{A}} \in L^2(l^2)$, а затем собирает то, что получилось, в одну функцию:

$$Gf \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(j,k)\in\mathcal{A}} w_{a_{j,k}} \Delta_k f_{j,k}.$$

Приведенная выше теорема из работы [3] сводится к вопросу об оценке

$$\|Gf\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{L^p(l^2)}, \quad 1 < p \le 2,$$

с константой C_p, зависящей только от p. Так же как и в случае операторов H_m, такая оценка непосредственно вытекает из классической теории операторов на мартингалах, но не следует из результатов Буркхольдера [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $h_J^i \stackrel{\text{def}}{=} (0,\ldots,0,1,0,\ldots) h_J$, где 1 стоит на i-м месте (аналогично определим функции h_0^i). Тогда система $\{h_0^i, h_J^i\}_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ J\sqsubseteq[0,1]}}$ является ортонормированным базисом для функций $f = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in L^2(l^2)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что линейный ограниченный оператор $T: L^2(l^2) \to L^2$ п р и н а д л е ж и т к л а с с у $\mathcal{G}(l^2)$, если для него выполняются следующие условия:

1. Для системы $\{Th_0^i, Th_J^i\}_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ J\sqsubseteq[0,1]}}$ выполняется равенство Парсеваля: для любой функции $g \in L^2$ имеем

$$\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} (g, Th_0^i)^2 + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ J\sqsubseteq[0,1]}} (g, Th_J^i)^2.$$

2. Оператор T не увеличивает носители базисных функций: $\operatorname{supp} Th_J^i \subseteq J$ для $J \sqsubseteq [0,1]$.

Класс $\mathcal{G}$ линейных операторов $T: L^2 \to L^2$ определяется аналогично (и проще) — рассматривается базис Хаара без участия индекса i и суммирование производится только по J.

Что касается условия 1, то оно требует от оператора больше, чем L^2-ограниченность, но меньше, чем унитарность в L^2. Условие 2, в свою очередь, совпадает с основным условием теоремы Ганди для фильтрации Хаара (в которой интервалы делятся пополам последовательно слева направо). Мы здесь сошлемся на вариант теоремы Ганди для векторнозначных мартингалов, сформулированный и доказанный в [5, теорема 1] (исходный скалярный вариант теоремы содержится в [6]). Если факт ограниченности мартингальных преобразований рассматривать как дискретный аналог ограниченности преобразования Гильберта, то теорему Ганди можно рассматривать как аналог результата об ограниченности операторов типа Кальдерона—Зигмунда общего вида, а упомянутое выше основное условие из нее – как аналог условия гладкости на ядро оператора. Из теоремы Ганди сразу вытекает равномерная L^p-ограниченность ($1 < p \le 2$) операторов из классов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}(l^2)$. С другой стороны, общность условий 1 и 2 в значительной мере приближается к общности условий самой теоремы Ганди.

Теперь заметим, что $H_m \in \mathcal{G}$ и $G \in \mathcal{G}(l^2)$. Действительно, операторы H_m унитарны и удовлетворяют скалярному варианту условия 2 по построению. Что касается оператора G, то нетрудно убедиться, что система $\{Gh_0^i, Gh_J^i\}_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ J\sqsubset[0,1]}}$ включает в себя ортонормированный базис в L^2, а остальные ее элементы – нулевые. Условие 2 для оператора G также будет выполнено.

Наша задача – распространить метод Буркхольдера на классы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}(l^2)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $1 < p \le 2$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Перенормируя функции Хаара, можем перенести классы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}(l^2)$ на любой интервал $I \sqsubset \mathbb{R}$. Обозначим $\langle h_I \rangle \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I h$. Функция Беллмана, которая позволяет получить оценку для операторов из класса $\mathcal{G}$, определяется следующим образом:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3, x_4) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \langle gTf \rangle_I - \langle f \rangle_I \langle gT1_I \rangle_I \;\middle|\; \begin{array}{c} f, g \in L^2(I), \quad T \in \mathcal{G}, \\ \langle f \rangle_I = x_1, \quad |\langle gT1_I \rangle_I|^2 = x_2, \\ \langle |f|^p \rangle_I = x_3, \quad \langle |g|^q \rangle_I = x_4 \end{array} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $\mathbf{B}$ не зависит от выбора интервала I и что для области $\Omega_{\mathbf{B}}$, состоящей из точек x, для которых супремум берется по непустому множеству, выполняется включение

$$\Omega_{\mathbf{B}} \subseteq \Omega \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3 \mid |x_1|^p \le x_3, x_2 \le x_4^{2/q}\}.$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $B \in C(\Omega)$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}$, если она удовлетворяет граничному условию и геометрическому условию типа вогнутости, которые выглядят следующим образом:

1. Если $|x_1|^p = x_3$, то $B(x) \ge 0$.

2. Если для $x, x^\pm \in \Omega$ и $\Delta \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\frac{x^+ + x^-}{2} - x = (0, \Delta^2, 0, 0),$$

то

$$B(x) \ge \frac{|x_1^+ - x_1^-|}{2}|\Delta| + \frac{B(x^+) + B(x^-)}{2}.$$

Используя метод беллмановской индукции, можно доказать, что любая такая функция является мажорантой для $\mathbf{B}$.

Теорема 1. *Если* $B \in \mathcal{K}$, *то* $\mathbf{B}(x) \le B(x)$ *для всех* $x \in \Omega_{\mathbf{B}}$.

С помощью формулы Тейлора условие типа вогнутости из определения класса $\mathcal{K}$ можно записать в дифференциальной форме:

$$d^2 B \le \frac{|dx_1|^2}{2B_{x_2}} \le 0.$$

Здесь мы подразумеваем, что слева вычисляется гессиан в произвольной точке из Ω и что он действует как квадратичная форма на произвольный вектор (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4). Опираясь на дифференциальную форму основного условия и используя рассуждения, сходные с теми, которые приведены в [7], мы можем найти конкретного представителя класса $\mathcal{K}$. А именно, для $y \in \mathbb{R}_+^4$ положим

$$B_0(y) \overset{\text{def}}{=} 2(y_3 + y_4) - y_1^p - y_2^{q/2} - \\ -\delta \begin{cases} y_1^{2-p} y_2 + y_1^{2-p-2t(p-1)} y_2^{t+1}, & y_1^p \ge y_2^{q/2}; \\ \dfrac{2}{q}(2+t) y_2^{q/2} + \dfrac{2}{p}(2 - p - t(p-1)) y_1^p, & y_1^p \le y_2^{q/2}. \end{cases}$$

Тогда для каждого $1 < p \le 2$ можно подобрать неотрицательные константы t, δ и C_p, такие что функция $B(x) = C_p B_0(|x_1|, x_2, x_3, x_4)$, $x \in \Omega$, окажется в классе $\mathcal{K}$. Используя эту функцию, теорему 1 и однородность функции $\mathbf{B}$, нетрудно для операторов $T \in \mathcal{G}$ получить оценку

$$\|Tf\|_{L^p} \le C_p' \|f\|_{L^p},$$

где

$$C_p' = 2p^{1/p} q^{1/q} C_p + 1.$$

Описанный метод потенциально позволяет вычислить точные константы в L^p-оценках. Для этого нужно найти непосредственно саму функцию **B**. Авторами данной работы уже установлено, что $\Omega_{\mathbf{B}} = \Omega$ и что функция **B** удовлетворяет свойствам 1 и 2 из определения класса $\mathcal{K}$. Поэтому ее следует искать как поточечный минимум всех функций из этого класса.

Пусть теперь $f = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in L^2(I, l^2)$ и $T \in \mathcal{G}(l^2)$. Обозначим

$$\mathbb{1}_I^i \overset{\text{def}}{=} (0,\ldots,0,1,0,\ldots)\mathbb{1}_I,$$

где 1 стоит на i-м месте. Под f_I будем понимать последовательность $\{\langle f_i\rangle_I\}_{i\in\mathbb{N}}$, а под $\langle gT\mathbb{1}_I\rangle_I$ – последовательность $\{\langle gT\mathbb{1}_I^i\rangle_I\}_{i\in\mathbb{N}}$. Под модулем вектора из l^2 будем понимать его l^2-норму, а под произведением таких векторов – их скалярное произведение. С этими оговорками все вышесказанное остается дословно верным вплоть до L^p-оценки оператора $T \in \mathcal{G}(l^2)$. Подчеркнем, что x_1 и dx_1 – теперь векторы из l^2, а все остальные переменные остаются скалярными (включая y_1 из определения функции B_0).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.И. Васюнина и Д.М. Столярова за ценные замечания, позволившие выбрать правильное направление в рассуждениях. Второй автор также благодарит А.Л. Вольберга за продуктивное обсуждение во время своего визита в MSU.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС". Второй автор также поддержан Программой фундаментальных исследований ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burkholder D.L.* Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms // Ann. Prob. 1984. V. 12. № 3. P. 647–702. https://doi.org/10.1214/aop/1176993220
2. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.
3. *Osipov N.N.* Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system // Алгебра и анализ. 2016. V. 28. № 5. P. 236–246. https://doi.org/10.1090/spmj/1469
4. *Rubio de Francia J.L.* A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals // Rev. Mat. Iberoam. 1985. V. 1. № 2. P. 1–14. https://doi.org/10.4171/RMI/7
5. *Кисляков С.В.* Мартингальные преобразования и равномерно сходящиеся ортогональные ряды // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1985. Т. 141. С. 18–38. https://doi.org/10.1007/BF01327037
6. *Gundy R.F.* A decomposition for L^1-bounded martingales // Ann. Math. Stat. 1968. V. 39. № 1. P. 134–138. https://doi.org/10.1214/aoms/1177698510
7. *Назаров Ф.Л., Трейль С.Р.* Охота на функцию Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. Вып. 5. С. 32–162.

ON BELLMAN FUNCTION METHOD FOR OPERATORS ON MARTINGALES

V. A. Borovitskiy[a,b], **N. N. Osipov**[a,c,*], **and A. S. Tselishchev**[a,b]

[a] *Saint-Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation*

[b] *Saint-Petersburg State University, Chebyshev Laboratory, Saint Petersburg, Russian Federation*

[c] *HSE University, International Laboratory of Game Theory and Decision Making, Saint Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

It is shown how to employ Bellman function method to general operators on martingales, i.e. to operators that are not necessarily martingale transforms. The following examples of such operators are considered: the Haar transforms and the operator whose L^p-boundedness implies the Rubio de Francia inequality for the Walsh system. For the corresponding Bellman function, the Bellman induction is carried out and a Bellman candidate is constructed.

Keywords: Burkholder method, Gundy theorem, Walsh system, Rubio de Francia inequality, Haar transform