ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 65–70

МАТЕМАТИКА

УДК 511.6

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ *S*-ЕДИНИЦАХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЯХ, ПОСТРОЕННЫХ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ ПО ДВУМ ЛИНЕЙНЫМ НОРМИРОВАНИЯМ

© 2021 г. Г. В. Федоров[1,*]

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 10.03.2021 г.
Поступило 10.03.2021 г.
После доработки 10.03.2021 г.
Принято к публикации 14.03.2021 г.

Для элементов гиперэллиптических полей впервые сформулирована теория функциональных непрерывных дробей обобщенного типа, связанная с двумя линейными нормированиями. Для произвольного элемента гиперэллиптического поля непрерывная дробь обобщенного типа сходится к этому элементу по каждому из выбранных двух линейных нормирований гиперэллиптического поля. Обозначим через S множество, состоящее из этих двух линейных нормирований. Найдены эквивалентные условия, описывающие взаимосвязь условия квазипериодичности непрерывной дроби обобщенного типа, наличия фундаментальной S-единицы и наличия соответствующего класса дивизоров конечного порядка в группе классов дивизоров гиперэллиптического поля. Последнее условие эквивалентно наличию точки кручения в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой. Найденные результаты завершают алгоритмическое решение проблемы периодичности в якобианах гиперэллиптических кривых рода два.

Ключевые слова: непрерывная дробь, фундаментальная *S*-единица, гиперэллиптическое поле, группа классов дивизоров

DOI: 10.31857/S2686954321030073

Пусть K – произвольное поле характеристики, отличной от 2. Пусть $f \in K[x]$ – некоторый свободный от квадратов многочлен, $L = K(x)(\sqrt{f})$ – гиперэллиптическое поле. Обозначим множество нормирований поля L, определенных над полем K, через $\mathcal{V}$, и S – некоторое конечное его подмножество.

В.П. Платонов в статье [1] предложил новый подход к проблеме кручения, основанный на глубокой связи трех проблем: проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых, проблема поиска и построения фундаментальных S-единиц колец S-целых элементов гиперэллиптических полей, проблема периодичности непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля. В эллиптическом случае над полем рациональных чисел проблема кручения решена Б. Мазуром [2] в 1978 г. В статье [3] исследована связь указанных трех проблем в эллиптическом случае, а в статье [4] полностью решена проблема периодичности непрерывных дробей элементов эллиптических полей над полем рациональных чисел. Для кривых рода 2 и выше над полем рациональных чисел проблема кручения в настоящее время является открытой.

Связь проблемы кручения в якобианах гиперэллиптических кривых с проблемой периодичности функциональных непрерывных дробей известна по работам [5, 6]. В общем случае теория непрерывных дробей и связь с указанными проблемами были существенно развиты в статьях [7, 8]. В этих статьях рассматриваются непрерывные дроби, построенные в полях формальных степенных рядов $K((x))$ или $K((1/x))$ с помощью, соответственно, линейного нормирования или бесконечного нормирования поля L. В статьях [9–11] глубоко изучена теория функциональных непрерывных дробей с точки зрения дивизориального анализа. Продолжая этот подход, в статье [12] построена новая теория непрерывных h-дробей, определенных с помощью нормирования v_h^- поля L степени два.

В данной работе впервые формулируется теория непрерывных дробей обобщенного типа, построенных сразу по двум линейным нормированиям, а также найдены соответствующие эквивалентные условия в терминах указанных трех проблем.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: fedorov@mech.math.msu.su*

1. ДИВИЗОРЫ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Обозначим $v = v_h$ нормирование поля $K(x)$, соответствующее неприводимому многочлену $h \in K[x]$, и $K(x)_v$ – пополнение поля $K(x)$ по нормированию v. Предположим, что нормирование v поля $K(x)$ имеет два продолжения v^- и v^+ на поле L. Это означает, что поле L может быть вложено в $K(x)_v$ двумя способами, которые соответствуют нормированиям v^- и v^+, и каждый элемент $\beta \in L$ имеет два разложения в степенные ряды в поле формальных степенных рядов, которые также соответствуют нормированиям v^- и v^+:

$$\beta = \sum_{j=s_0}^{\infty} e_j^{\pm} h_v^j, \quad e_j^{\pm} \in K[x], \quad \deg e_j^{\pm} < \deg h,$$

причем для любого $s \geq s_0$ имеем

$$v^{\pm}\left(\beta - \sum_{j=s_0}^{s} e_j^{\pm} h_v^j\right) > s,$$

где в обозначениях $v^{\pm}$ и $e_j^{\pm}$ везде выбирается знак + или знак – соответственно. Будем полагать, что $\deg v^- = \deg v^+ = \deg h$.

Обозначим $\mathrm{Div}(L) = \left\{D = \sum_{v \in \mathcal{V}} n_v v, n_v \in \mathbb{Z}\right\}$ – группа K-дивизоров поля L, где каждому дивизору D взаимно однозначно соответствует набор целых чисел $\{n_v\}_{v \in \mathcal{V}}$, в котором только конечное количество элементов отлично от нуля. Там, где ясно, что суммирование берется по $v \in \mathcal{V}$, будем его опускать. Все дивизоры, о которых далее пойдет речь, определены над K и лежат в $\mathrm{Div}(L)$.

Для $D \in \mathrm{Div}(L)$, $D = \sum n_v v$, определим $\deg D = \sum n_v \deg v$, $\deg_z D = \sum_{n_v > 0} n_v \deg v$. Для фиксированного нормирования $v \in \mathcal{V}$ определим число $v(D) = n_v = n_v(D)$. Дивизор $D \in \mathrm{Div}(L)$ называется эффективным, если $v(D) \geq 0$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Скажем, что для дивизоров $D, E \in \mathrm{Div}(L)$ выполнено сравнение $D \leq E$, если $E - D$ эффективный дивизор. Для двух эффективных дивизоров $D, E \in \mathrm{Div}(L)$ определим эффективный дивизор $\mathrm{gcdiv}(D, E) \in \mathrm{Div}(L)$ следующим образом:

$$\mathrm{gcdiv}(D, E) = \sum \min(v(D), v(E)) \cdot v.$$

Если $\min(v(D), v(E)) = 0$ для всех $v \in \mathcal{V}$, то будем писать $\mathrm{gcdiv}(D, E) = 0$.

Для главного дивизора (α) функции $\alpha \in L$, $\alpha \neq 0$, обозначим $(\alpha)_\circ$ и $(\alpha)_\infty$, соответственно, эффективный дивизор нулей и эффективный дивизор полюсов функции α так, что $(\alpha) = (\alpha)_\circ - (\alpha)_\infty$, причем $v((\alpha)_\circ) \cdot v((\alpha)_\infty) = 0$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Для функций α, $\beta \in L$ определим $\mathrm{gcdiv}(\alpha, \beta) = \mathrm{gcdiv}((\alpha)_\circ, (\beta)_\circ)$.

Для нормирования v_h поля $K(x)$, заданного с помощью неприводимого многочлена $h \in K[x]$, имеющего два неэквивалентных продолжения v_h^- и v_h^+ на поле L, обозначим соответствующие эффективные дивизоры $(h)_\circ^- = 1 \cdot v_h^-$, $(h)_\circ^+ = 1 \cdot v_h^+$, $(h)_\circ^-, (h)_\circ^+ \in \mathrm{Div}(L)$. Если же продолжения v_h^- и v_h^+ нормирования v_h поля $K(x)$ на поле L эквивалентны, то будем писать $v_h = v_h^- = v_h^+$, $(h)_\circ^- = (h)_\circ^+ \in \mathrm{Div}(L)$. Аналогично, для продолжений v_∞^- и v_∞^+ бесконечного нормирования v_∞ поля $K(x)$, будем использовать обозначения эффективных дивизоров $\infty^- = 1 \cdot v_\infty^-$ и $\infty^+ = 1 \cdot v_\infty^+$, причем $\infty^- \neq \infty^+$, если $v_\infty^- \neq v_\infty^+$, и $\infty^+ = \infty^- = \infty$, если $v_\infty^- = v_\infty^+ = v_\infty$. Таким образом, например, запись $\infty^- + \infty^+$ мы будем использовать, как для случая $\infty^- \neq \infty^+$, так и для случая $\infty^- = \infty^+$, когда $\infty^- + \infty^+ = 2\infty$.

Инволюция ι поля L, действующая $\iota: \sqrt{f} \to -\sqrt{f}$, $\iota^2 = \mathrm{id}$, может быть естественным образом определена на множестве нормирований поля L. Действительно, если нормирование v поля $K(x)$ имеет два продолжения v^- и v^+ (возможно эквивалентных), то для любого $\alpha \in L$ имеем $v^-(\alpha) = v^+(\iota\alpha) = \iota v^+(\alpha)$, поэтому корректно писать $v^- = \iota v^+$ и $v^+ = \iota v^-$. Следовательно, инволюция ι естественным образом продолжается на $\mathrm{Div}(L)$ – группу K-дивизоров поля L. В частности, $\infty^+ = \iota\infty^-$, $(h)_\circ^+ = \iota(h)_\circ^-$.

Обозначим $g = [(\deg f - 1)/2]$. Следующая лемма является аналогом утверждения, сформулированного Мамфордом (см. [13, шаг II § 2 гл. IIIa]).

Л е м м а 1. *Если* $\alpha \in L$, $\alpha \neq 0$, *причем* $\deg_z(\alpha) \leq g$, *то* $\alpha \in K(x)$.

Группу дивизоров степени ноль поля L обозначим $\mathrm{Div}^\circ(L)$, группу главных дивизоров поля L обозначим $\mathrm{Princ}(L)$, группу классов дивизоров степени ноль поля L обозначим $\Delta^\circ(L) = \mathrm{Div}^\circ(L)/\mathrm{Princ}(L)$. Скажем, что дивизоры D, $E \in \mathrm{Div}^\circ(L)$ эквивалентны $D \sim E$, если они принадлежат одному классу в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$.

Для эффективного дивизора $D \in \mathrm{Div}(L)$ такого, что $v_\infty^-(D) = v_\infty^+(D) = 0$, обозначим $\mathrm{Pol}(D) \in K[x]$ многочлен минимальной степени такой, что

$(\mathrm{Pol}(D))_\circ \ge D$ и старший коэффициент многочлена Pol(D) равен 1. Поскольку дивизор $D + \iota D - \deg D(\infty^- + \infty^+)$ является главным дивизором некоторого многочлена из $K[x]$, то такой многочлен $\mathrm{Pol}(D)$ корректно определен.

Для функции $\alpha \in K[x][\sqrt{f}]$ и $t \in \mathbb{N}$ обозначим $(\alpha)_{[t]}$ такой дивизор, что $\deg(\alpha)_{[t]} = 2t$, и главный дивизор функции α имеет вид $(\alpha) = (\alpha)_{[t]} - t(\infty^- + \infty^+)$. Назовем дивизор $D \in \mathrm{Div}(L)$ приведенным, если D эффективный дивизор степени g, такой, что $2\mathrm{gcdiv}(D, \iota D) \le (f)_{[2g+2]}$. Если для приведенного дивизора D справедливо $v_\infty^-(D) = v_\infty^+(D) = 0$, то корректно определен многочлен $U = \mathrm{Pol}(D) \in K[x]$, причем $\deg U = g$ и главный дивизор многочлена U имеет вид $(U) = D + \iota D - g(\infty^- + \infty^+)$.

Пусть $V \in K[x]$, $\deg V \le g+1$, тогда имеем $v_\infty^{\pm}(V - \sqrt{f}) \ge -g - 1$. Значит, дивизор $(V - \sqrt{f})_{[g+1]}$ эффективный и $\deg(V - \sqrt{f})_{[g+1]} = 2(g+1)$.

Пусть дан многочлен $U \in K[x]$, $\deg U \le g$. Для эффективного дивизора $(U)_\circ^-$ такого, что дивизор нулей многочлена U имеет вид $(U)_\circ = (U)_\circ^- + \iota(U)_\circ^-$, определим эффективные дивизоры $(U)_\circ^+$, $(U)_{[g]}^-$, $(U)_{[g]}^+ \in \mathrm{Div}(L)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}(U)_\circ^+ = \iota(U)_\circ^-, \quad (U)_{[g]}^- = (U)_\circ^- + (g - \deg U)\infty^-,\\ (U)_{[g]}^+ = (U)_\circ^+ + (g - \deg U)\infty^+.\end{gathered} \tag{1}$$

Далее мы будем везде использовать сокращенную запись $(U)_\circ^-$, $(U)_\circ^+$, подразумевая под ней дивизоры $(U)_{[g]}^-$ и $(U)_{[g]}^+$ степени g соответственно. Также под сокращенной записью $(V - \sqrt{f})_\circ$ для $V \in K[x]$, $\deg V \le g+1$, мы будем иметь в виду дивизор $(V - \sqrt{f})_{[g+1]}$ степени $2(g+1)$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть $g \ge 1$ и неэквивалентные нормирования v_x, v_h поля $K(x)$ имеют по два неэквивалентных продолжения $v_x^- \ne v_x^+$, $v_h^- \ne v_h^+$ на поле L, которым соответствуют эффективные дивизоры $(x)_\circ^- \ne (x)_\circ^+$, $(h)_\circ^- \ne (h)_\circ^+$ такие, что* $\deg(x)_\circ^- = \deg(h)_\circ^- = 1$. *Пусть $D \in \mathrm{Div}(L)$ — некоторый приведенный дивизор такой, что $v_x^+(D) = v_h^+(D) = 0$. Тогда*

1) *существует единственный многочлен $V \in K[x]$, $\deg V \le g+1$, такой, что*

$$D + (x)_\circ^- + (h)_\circ^- \le (V - \sqrt{f})_{[g+1]};$$

2) *существует единственный с точностью до умножения на постоянную из K^* многочлен $U \in K[x]$, $\deg U \le g$, такой, что главный дивизор*

$$U = D + \iota D - g(\infty^- + \infty^+);$$

3) *дивизор $E = (V - \sqrt{f})_{[g+1]} - D - (x)_\circ^- - (h)_\circ^-$ является приведенным*;

4) *если $\infty^- \ne \infty^+$, то $v_\infty^{\pm}(V - \sqrt{f}) = \delta^{\pm} - (g+1)$, причем $\delta^{\pm} \in \mathbb{N}_0$, $\delta^{\pm} \ge v_\infty^{\pm}(D)$, $\delta^- \cdot \delta^+ = 0$;*

5) *корректно определен многочлен $T \in K[x]$:*

$$T = \frac{f - V^2}{Uxh} \in K[x], \quad \deg T \le g;$$

6) *справедливо равенство*

$$T = E + \iota E - g(\infty^- + \infty^+).$$

Для данного приведенного дивизора $D \in \mathrm{Div}(L)$, $v_x^+(D) = v_h^+(D) = 0$, и данных дивизоров $(x)_\circ^-$, $(h)_\circ^-$, соответствующих линейным нормированиям v_x^-, v_h^-, назовем представлением Мамфорда дивизора $D + (x)_\circ^- + (h)_\circ^-$ набор из двух многочленов (Uxh, V), корректно определенных по предложению 1. Представление Мамфорда данного приведенного дивизора определено однозначно с точностью до умножения многочлена U на постоянную из K^*. Из предложения 1 следует, что представлением Мамфорда дивизора

$$E + (x)_\circ^- + (h)_\circ^- = (V - \sqrt{f})_{[g+1]} - D$$

является набор $(T \cdot x \cdot h, V)$.

Теперь покажем, как по представлению Мамфорда — набору из двух многочленов, удовлетворяющих специальным условиям, — построить соответствующий приведенный дивизор.

Пусть даны многочлены $T, U, V \in K[x]$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}UxhT = f - V^2, \quad \deg U \le g,\\ \deg T \le g, \quad \deg V \le g+1.\end{gathered} \tag{2}$$

Так как $xh \mid f - V^2$, то без ограничения общности считаем обозначения нормирований $v_x^- \ne v_x^+$, $v_h^- \ne v_h^+$ такими, что $v_x^-(V - \sqrt{f}) > 0$ и $v_h^-(V - \sqrt{f}) > 0$. Положим

$$D = \mathrm{gcdiv}((V - \sqrt{f})_{[g+1]}, (U)_{[g]}). \tag{3}$$

Тогда D — приведенный дивизор, и представление Мамфорда дивизора $D + (x)_\circ^- + (h)_\circ^-$ имеет вид $(U \cdot x \cdot h, V)$. Действительно, по определению D — эффективный дивизор, для которого справедливо соотношение $2\mathrm{gcdiv}(D, \iota D) \le (f)_{[2(g+1)]}$, и в силу

$$(U)_{[g]} \le (V - \sqrt{f})_{[g+1]} + (V + \sqrt{f})_{[g+1]}$$

имеем $\deg D = g$. Кроме того, по предложению 1 единственным образом определен приведенный дивизор E, для которого представлением Мамфорда является набор $(T \cdot x \cdot h, V)$.

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. *Существуют взаимно однозначные соответствия между следующими множествами*:

множеством приведенных дивизоров $D \in \mathrm{Div}(L)$, $v_x^+(D) = v_h^+(D) = 0$;

множеством пар многочленов $U, V \in K[x]$, $\mathrm{lc}U = 1$, *удовлетворяющих* (2) *для некоторого* $T \in K[x]$;

множеством элементов $\alpha = \dfrac{\sqrt{f} + V}{T} \in L$, *где многочлены* $T, V \in K[x]$, $\mathrm{lc}(T) = 1$, *удовлетворяют условиям* (2) *для некоторых* $U \in K[x]$.

2. ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАМФОРДА

Пусть дан элемент $\alpha = (\sqrt{f} + V)/T \in L$, где многочлены $T, V \in K[x]$ удовлетворяют условиям (2) для некоторого $U \in K[x]$. Покажем, как построить обобщенную непрерывную дробь для элемента α, которая сходится к α сразу по двум линейным нормированиям v_x^- и v_h^-.

Положим $U_{-1} = U$, $V_{-1} = V$, $T_0 = T$.

Теорема 1. *Существуют и единственны последовательности многочленов* $U_j, T_j, V_j, e_j \in K[x]$, $j \in \mathbb{N}_0$, $U_j \neq 0$, $T_j \neq 0$, $e_j \neq 0$, *и приведенных дивизоров* $D_j, E_j \in \mathrm{Div}(L)$, $j \in \mathbb{N}_0$, *удовлетворяющих следующим условиям для* $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{gathered} U_j = T_j x^{s_j - r_j} h^{r_j - s_j}, \\ V_j = e_j T_j x^{-r_j} h^{-s_j} - V_{j-1}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} f - V_j^2 = U_j x h T_{j+1}, \quad \deg U_j \le g, \\ \deg T_{j+1} \le g, \quad \deg V_j \le g + 1, \end{gathered} \tag{5}$$

$$(U_{j-1}) = D_j + \iota D_j - g(\infty^- + \infty^+), \tag{6}$$

$$(T_j) = E_j + \iota E_j - g(\infty^- + \infty^+), \tag{7}$$

$$D_j = \mathrm{gcdiv}((V_{j-1} - \sqrt{f})_{[g+1]}, (U_{j-1})_{[g]}), \tag{8}$$

$$E_j = \mathrm{gcdiv}((V_{j-1} - \sqrt{f})_{[g+1]}, (T_j)_{[g]}), \tag{9}$$

$$(V_{j-1} - \sqrt{f})_{[g+1]} = D_j + (x)_\circ^- + (h)_\circ^- + E_j, \tag{10}$$

$$D_{j+1} = \iota E_j - r_j((x)_\circ^+ - (h)_\circ^-) - s_j((h)_\circ^+ - (x)_\circ^-), (11) \quad (11)$$

где $r_j = v_x(T_j)$, $s_j = v_h(T_j)$.

Пусть последовательности многочленов U_j, T_j, $V_j, e_j \in K[x]$, $j \in \mathbb{N}_0$, и приведенных дивизоров $D_j, E_j \in \mathrm{Div}(L)$, $j \in \mathbb{N}_0$, определены условиями теоремы 1. Положим $\alpha_j = (\sqrt{f} + V_{j-1})/T_j \in L$, $a_j = e_j x^{-r_j} h^{-s_j}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\alpha_0 = \alpha$ и справедливы следующие утверждения:

$(U_{j-1} x h, V_{j-1})$ – представление Мамфорда дивизора $D_j + (x)_\circ^- + (h)_\circ^-$;

$(T_j x h, V_{j-1})$ – представление Мамфорда дивизора $E_j + (x)_\circ^- + (h)_\circ^-$;

$$(x/h)^{r_j - s_j}(\alpha_j - a_j) = xh/\alpha_{j+1}.$$

Поскольку величины r_j, s_j и приведенные дивизоры E_j, D_{j+1} могут быть единственным образом восстановлены по многочленам T_j и V_{j-1}, то “неполное частное” a_j есть функция от элемента α_j. Поэтому корректно использовать обозначение $a_j = [\alpha_j]_{x,h}^-$.

Пусть теперь дан приведенный дивизор $D_0 \in \mathrm{Div}(L)$ такой, что $v_x^+(D_0) = v_h^+(D_0) = 0$. По предложению 1 корректно определены многочлены $U_{-1}, V_{-1} \in K[x]$ такие, что $(U_{-1} x h, V_{-1})$ – представление Мамфорда дивизора $D_0 + (x)_\circ^- + (h)_\circ^-$. Многочлены U_{-1}, V_{-1} определены единственным образом с точностью до домножения многочлена U_{-1} на постоянную из K^*. Справедливы условия (5) при $j = -1$ для некоторого многочлена $T_0 \in K[x]$. Следовательно, единственным образом определены последовательности многочленов U_j, T_j, V_j, $e_j \in K[x]$, $j \in \mathbb{N}_0$, $U_j \neq 0$, $T_j \neq 0$, $e_j \neq 0$, и приведенных дивизоров $D_j, E_j \in \mathrm{Div}(L)$, $j \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющих условиям (4)–(11) для $j \in \mathbb{N}_0$.

Таким образом, понятие непрерывной дроби может быть идентифицировано с каждой из трех связанных друг с другом последовательностей:

последовательность пар многочленов U_j, V_j, удовлетворяющих (5) и (4) для некоторых многочленов e_j, T_j, однозначно восстанавливающихся по паре U_j, V_j;

последовательность приведенных дивизоров D_j, удовлетворяющих (10)–(11) для некоторого многочлена V_{j-1} и приведенного дивизора E_j такого, что $v_x^-(E_j) = r_j$, $v_h^-(E_j) = s_j$;

последовательность полных частных α_j, удовлетворяющих

$$a_j = [\alpha_j]^-_{x,h}, \quad r_j = -v_x^-(a_j), \quad s_j = -v_h^-(a_j),$$
$$\left(\frac{x}{h}\right)^{r_j - s_j}(\alpha_j - a_j) = \frac{xh}{\alpha_{j+1}}. \tag{12}$$

В итоге получаем обобщенную непрерывную дробь

$$\alpha_0 = a_0 + \cfrac{x^{1+s_0-r_0}h^{1+r_0-s_0}}{a_1 + \cfrac{x^{1+s_1-r_1}h^{1+r_1-s_1}}{a_2 + \ldots}}, \tag{13}$$

полные и неполные частные которой удовлетворяют соотношениям (12) для $j \in \mathbb{N}_0$. Мы будем рассматривать только такие обобщенные непрерывные дроби, поэтому далее для краткости будем называть выражение (13) непрерывной дробью и обозначать ее следующим образом:

$$[a_0; a_1 | x^{1+s_0-r_0}h^{1+r_0-s_0}, a_2 | x^{1+s_1-r_1}h^{1+r_1-s_1}, \ldots].$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $D_0 \in \mathrm{Div}(L)$ – такой приведенный дивизор, что $v_x^+(D_0) = v_h^+(D_0) = 0$. Пусть $(U_{-1}xh, V_{-1})$ – представление Мамфорда дивизора $D_0 + (x)^-_\circ + (h)^-_\circ$. Пусть D_j – последовательность приведенных дивизоров, построенная в теореме* 1. *Тогда при $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

$$E_0 - E_n \sim D_n - D_0 \sim \sum_{j=0}^{n-1}(1 + r_j + s_j)((x)^-_\circ - (h)^+_\circ). \tag{14}$$

3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Пусть свободный от квадратов многочлен $f \in K[x]$, такой, что нормирования v_x и v_h поля $K(x)$ имеют два неэквивалентных продолжения $v_x^- \neq v_x^+$ и $v_h^- \neq v_h^+$ на поле $L = K(x)(\sqrt{f})$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $D_0 \in \mathrm{Div}(L)$ – такой приведенный дивизор, что $r_0 = v_x^-(D_0) = g$ или $s_0 = v_h^-(D_0) = g$. Пусть $(U_{-1}xh, V_{-1})$ – представление Мамфорда дивизора $D_0 + (x)^-_\circ + (h)^-_\circ$ и справедливы построения* (4)–(11) *для $j \in \mathbb{N}_0$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *найдется минимальный номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $D_n = D_0$*;

2) *найдется минимальный номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $U_{n-1} = cU_{-1}$ для некоторой постоянной $c \in K^*$*;

3) *найдется минимальный номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $V_{n-1} = V_{-1}$ и $T_n = c^{-1}T_0$ для некоторой постоянной $c \in K^*$*;

4) *найдется минимальный номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $E_n = E_0$*;

5) *классы эквивалентных дивизоров $(h)^-_\circ - (x)^+_\circ \sim \sim (x)^-_\circ - (h)^+_\circ$ имеют конечный порядок m в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$*;

6) *непрерывные дроби типа* (13) *элементов $\sqrt{f}/x^g$ и $\sqrt{f}/h^g$ квазипериодические с длиной квазипериода n*;

7) *в гиперэллиптическом поле L существует фундаментальная S-единица степени m, где $S = \{v_x^-, v_h^+\}$*;

8) *для некоторого $b \in K^*$ уравнение*

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 f = bx^m h^m,$$
$$\max(2\deg\mu_1, 2\deg\mu_2 + \deg f) = 2m, \tag{15}$$

имеет решение $\mu_1, \mu_2 \in K[x]$ такое, что $v_x(\mu_2) = v_h(\mu_2) = 0$, $\mu_2 \neq 0$.

Если существуют $n, m \in \mathbb{N}$, указанные в эквивалентных условиях 1)–6), *то они связаны соотношением*

$$m = \sum_{j=0}^{n-1}(1 + r_j + s_j),$$

где для $j \in \mathbb{N}_0$ справедливы равенства

$$r_j = -v_x^-(\alpha_j) = -v_x(\alpha_j) = v_x^-(E_j) = = v_x(T_j) = v_h(U_j) = v_h^-(D_{j+1}), \tag{16}$$

$$s_j = -v_h^-(\alpha_j) = -v_h(a_j) = v_h^-(E_j) = = v_h(T_j) = v_x(U_j) = v_x^-(D_{j+1}).$$

В следующем примере приведено гиперэллиптическое поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, в котором непрерывная дробь вида (13) для элемента $\sqrt{f}/x^2$ квазипериодическая, но не периодическая. Это обстоятельство еще раз подчеркивает существенное отличие непрерывной дроби вида (13) от непрерывных дробей в полях $\mathbb{Q}((x))$ и $\mathbb{Q}((h))$.

П р и м е р 1. Рассмотрим $g = 2$, $h = x - 1$ и многочлен

$$f(x) = -(x^2 + x + 1)(4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4) =$$
$$= -(h^2 + 3h + 3)(4h^4 + 9h^3 + 7h^2 + 3h - 3) = \phi(h).$$

Положим $S = \{v_x^-, v_h^+\}$, $S' = \{v_x^-, v_h^-\}$. Для элемента $\sqrt{f}/x^g$ непрерывная дробь вида (13) с положительными разложениями $\sqrt{f}$ в степенные ряды в полях $\mathbb{Q}((x))$ и $\mathbb{Q}((h))$ имеет вид:

$$\left[-\frac{7x^3-12x^2+3x-4}{2};\right.$$
$$\overline{\left.\frac{x-2}{5}|x^{-1}h^3, -(x-2)(13x^2+3x+8)|xh\right.}^{1/4}\Bigg].$$

Эта непрерывная дробь квазипериодическая, но не периодическая. Длина квазипериода равна 2, коэффициент квазипериода $c = \frac{1}{4}$. Степень соответствующей фундаментальной S-единицы равна 4. В качестве фундаментальной S-единицы можно выбрать $(\omega_1 + \omega_2\sqrt{f})x^{-4}$ или $(\omega_1 + \omega_2\sqrt{f})h^{-4}$, где

$$\omega_1 = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8, \quad \omega_2 = 2(x-2).$$

Для элемента $\sqrt{\phi}/h^g$ непрерывная дробь вида (13) с положительными разложениями $\sqrt{f}$ в степенные ряды в полях $\mathbb{Q}((x))$ и $\mathbb{Q}((h))$ имеет вид

$$\left[\frac{h^3+2h^2+5h+12}{4};\right.$$
$$\overline{\left.\frac{4(h-1)}{5}|x^3h^{-1}, -\frac{(h-1)(13h^2+29h+24)}{16}|xh\right.}^{4}\Bigg].$$

Для элемента $\sqrt{f}/x^g$ непрерывная дробь вида (13) с разложениями $\sqrt{f}$ в степенные ряды в полях $\mathbb{Q}((x))$ и $\mathbb{Q}((h))$ разных знаков неквазипериодическая, следовательно, в поле L нет нетривиальных S'-единиц. Непрерывные дроби элементов $\sqrt{f(x)}/x^{g+1}$ и $\sqrt{f(x)}/h^{g+1}$ соответственно в полях $\mathbb{Q}((x))$ и $\mathbb{Q}((h))$ не являются квазипериодическими, поэтому в поле L нет нетривиальных S_x-единиц и S_h-единиц, где $S_x = \{v_x^-, v_x^+\}$ и $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 19-71-00029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Platonov V.P.* Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field // Russian Math. Surveys. 2014. V. 69. № 1. P. 1–34.
2. *Mazur B.* Rational isogenies of prime degree // Ivent. Math. 1978. V. 44. № 2. P. 129–162.
3. *Platonov V.P., Fedorov G.V.* On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields // Sb. Math. 2018. V. 209. № 4. P. 519–559.
4. *Platonov V.P., Fedorov G.V.* On the problem of classification of periodic continued fractions in hyperelliptic fields // Russian Mathematical Surveys. 2020. V. 75. № 4. P. 785–787.
5. *Artin E.* Quadratische K'orper im Gebiete der h'oheren Kongruenzen. I // Math. Z. 1924. V. 19. №1. P. 153–246.
6. *Adams W. W., Razar M. J.* Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. V. 41. №3. P. 481–498.
7. *Platonov V.P., Petrunin M.M.* Groups of S-units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. V. 302. P. 336–357.
8. *Fedorov G.V.* On the period length of a functional continued fraction over a number field // Dokl. Math. 2020. V. 102. № 3. P. 513–517.
9. *Berry T.G.* On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields // Arch. Math. 1990. V. 55. P. 259–266.
10. *Zhgoon V.S.* On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields // Chebyshevskii Sbornik. 2017. V. 18. № 4. P. 208–220. (In Russ.)
11. *Zannier U.* Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // American Journal of Mathematics. 2019. V. 141. № 1. P. 1–40.
12. *Fedorov G.V.* On the S-units for the valuations of the second degree in hyperelliptic fields // Izvestiya. Mathematics. 2020. V. 84. № 2. P. 392–435.
13. *Mumford D.* Tata Lectures on Theta I, II // Progress in Mathematics. 1983, 1984. V. 28, 43.

ON FUNDAMENTAL S-UNITS AND CONTINUED FRACTIONS, CONSTRUCTED IN HYPERELLIPTIC FIELDS BY TWO LINEAR VALUATIONS

G. V. Fedorov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov

In this paper, for the elements of hyperelliptic fields, the theory of functional continued fractions of generalized type associated with two linear valuations is formulated for the first time. For an arbitrary element of the hyperelliptic field, the continued fraction of the generalized type converges to this element for each of the two selected linear valuations of the hyperelliptic field. Denote by S the set consisting of these two linear valuations. We find equivalent conditions describing the relationship between the condition of a continued fraction of generalized type, the existence of a fundamental S-unit, and the existence of a class of divisors of finite order in the divisor class group of a hyperelliptic field. The last condition is equivalent to the existence of a torsion point in the Jacobian of a hyperelliptic curve. These results complete the algorithmic solution of the periodicity problem in the Jacobians of hyperelliptic curves of genus two.

Keywords: continued fraction, fundamental S-unit, hyperelliptic field, divisor class group