ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 31–36

МАТЕМАТИКА

УДК 517.972

РАНДОМИЗИРОВАННОЕ КВАНТОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. Дж. Гоф[1], Ю. Н. Орлов[2,3], В. Ж. Сакбаев[2,4,*], О. Г. Смолянов[4,5]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.02.2021 г.
Поступило 19.02.2021 г.
После доработки 05.04.2021 г.
Принято к публикации 05.04.2021 г.

В связи с неоднозначностью процедуры квантования гамильтоновых систем вводится понятие случайного квантования и связанные с ним случайные величины со значениями в пространстве самосопряженных операторов и случайные процессы со значениями в группе унитарных преобразований. Определяется процедура усреднения случайных унитарных групп и случайных самосопряженных операторов. Вводится обобщение понятия слабой сходимости последовательности мер и соответствующее обобщение понятия сходимости по распределению. Устанавливается сходимость по распределению последовательности композиций независимых случайных преобразований. В случае последовательности композиций независимых случайных преобразований сдвига на вектор евклидова пространства полученные результаты совпадают с центральной предельной теоремой для сумм независимых случайных векторов. Результаты применяются к динамике квантовых систем, возникающих при случайном квантовании классической гамильтоновой системы.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайная операторнозначная функция, операторнозначный случайный процесс, закон больших чисел, центральная предельная теорема, марковские процессы, уравнение Колмогорова

DOI: 10.31857/S2686954321030085

Квантование гамильтоновой системы не является однозначно определенной процедурой, поэтому мы вводим понятие рандомизированного (случайного) квантования. Случайным квантованием гамильтоновой системы будем называть отображение линейного пространства функций Гамильтона, заданных на симплектическом фазовом пространстве, сопоставляющее каждой функции Гамильтона случайную величину, значениями которой являются самосопряженные операторы, действующих в гильбертовом пространстве квантовой системы. Предложенная схема охватывает все известные способы квантования, поскольку значение случайной величины на каждом элементе вероятностного пространства описывает некоторое квантование. При этом случайная полугруппа, генерируемая случайным гамильтонианом, представляет собой случайный процесс со значениями в группе унитарных операторов.

В сообщении рассматриваются линейные квантования гамильтоновых систем, введенные в работе [1] и развитые в работах [2]). Линейное квантование представляет собой линейное отображение некоторого векторного пространства функций Гамильтона, заданных на симплектическом фазовом пространстве, в некоторое векторное пространство квантовых гамильтонианов, представляющих собой самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве квантовой системы.

Интерес к изучению случайных величин со значениями в множестве неограниченных операторов в банаховых пространствах и случайных процессов со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов возникает в ряде задач математической физики [3–5]. Так, если в функциональной механике функция Гамильтона может быть случайной величиной [6], то квантовым аналогом функциональной механики является квантовая система, гамильтониан которой представляет собой случайную величину со значениями в множестве самосопряжен-

[1]*Aberystwyth University, Wales, United Kingdom*
[2]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
[3]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*
[4]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[5]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: fumi2003@mail.ru*

ных операторов [7]. Случайность гамильтониана квантовой системы является следствием неоднозначности процедуры квантования классических гамильтоновых систем ([1, 7]). Таким образом, имеют место два источника случайности при исследовании динамики квантовых систем.

1. Гамильтониан классической системы представляет собой случайную величину со значениями в пространстве непрерывно дифференцируемых функций на фазовом пространстве;

2. Квантование классической гамильтоновой системы является случайной величиной со значениями в пространстве линейных отображений линейного многообразия пространства гладких функций на фазовом пространстве в линейное многообразие в пространстве самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве квантовой системы.

Представляет интерес изучение влияния как каждого из двух источников случайности, так и их совместного влияния на такие характеристики квантовой динамики системы, как среднее значение случайной динамической полугруппы, ее ковариационные характеристики и распределения вероятности на множестве допустимых квантовых состояний.

В работе дано определение слабой сходимости последовательности мер в терминах сходимости последовательности связанных с этими мерами линейных операторов, действующих в подходящем топологическом векторном пространстве пробных функций. Показано, что данное определение включает в себя определение слабой сходимости мер, если в качестве пространства пробных функций выбирать пространство ограниченных непрерывных функций, наделенное топологией поточечной сходимости. С помощью введенного обобщения слабой сходимости мер получены утверждения о сходимости по распределению векторнозначных случайных процессов. Показано, что теорема Чернова об аппроксимации операторных полугрупп представляет собой предельную теорему, описывающую предельные распределения векторнозначных случайных процессов, и включает в себя центральную предельную теорему как одну из реализаций утверждения теоремы Чернова.

1. Случайные операторы и полугруппы. Для изучения случайных операторнозначных функций введем следующую терминологию. Случайной величиной мы называем $\mathcal{A}$-измеримую функцию ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ со значениями в некотором измеримом пространстве. Случайная величина ξ принимает значения в некотором топологическом пространстве, снабженном борелевской σ-алгеброй подмножеств. Например, если такая случайная величина ξ принимает значения в множестве самосопряженных операторов, то она называется случайным гамильтонианом; аналогично определяется и понятие случайной полугруппы (определения 1 и 4).

Пусть $Y_s(X)$ – топологическое векторное пространство сильно непрерывных отображений $\mathbf{F}$ полуоси $R_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство $B(X)$ линейных преобразований банахова пространства X, топология τ_s на котором определяется семейством функционалов $\phi_{T,u}$, $T \geq 0$, $u \in X$, действующих по правилу $\phi_{T,u}(\mathbf{F}) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\mathbf{F}(t)u\|_X$; пусть также X_* – такое банахово пространство, что $(X_*)^* = X$.

Определение 1. Случайной операторнозначной функцией называется случайная величина со значениями в топологическом векторном пространстве $Y_s(X)$. Случайной полугруппой называется случайная величина G, принимающую значения в множестве $\mathcal{S}(X)$ сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов, действующих в пространстве X.

Средним значением случайной полугруппы G называется интеграл Петтиса $M[G] = \int\limits_{\Omega} G_\omega d\mu(\omega)$, где $M[G]$ – такой элемент пространства $Y_s(X)$, что для любых $t \in R_+$, $f \in X$, $g \in X_*$ выполняется равенство

$$\langle M[G](t)f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} \langle G_\omega(t)f, g\rangle d\mu(\omega).$$

Через $\langle f, g\rangle$ обозначено значение функционала $f \in X_*^*$ на элементе $g \in X_*$.

Теорема 1 [7]. *Пусть μ – вещественнозначная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω с ограниченной вариацией. Пусть случайная величина ξ со значениями в пространстве $Y_s(X)$ является равномерно ограниченной и плотно сильно равностепенно непрерывной, т.е. существует такое плотное линейное подпространство $D \subset X$, что для любого $f \in D$ и любого $\sigma > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in R_+$ и любого $\Delta t \in (0, \delta)$: $t + \Delta t \in R_+$ выполняется следующее неравенство*:

$$\sup_{t\in R_+, \omega\in\Omega} \|\xi_\omega(t + \Delta t)f - \xi_\omega(t)f\|_X \leq \sigma.$$

Тогда $M\xi(t) \in Y_s(X)$.

Теорема (P. Chernoff, 1968, [8, 9]). *Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов в X и пусть функция $\mathbf{F}$: $[0, +\infty) \to B(X)$ удовлетворяет условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, непрерывна в сильной операторной* *топологии и удовлетворяет оценке* $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(X)} \leq e^{\alpha t}$, $t \geq 0$, *при некотором* $\alpha \geq 0$. *Тогда если оператор* $\mathbf{F}'(0)$ *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $\mathbf{U}(t), t \geq 0$, *то для любого* $u \in X$ *и любого* $T > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \mathbf{U}(t)u - \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u \right\|_X = 0.$$

Пусть $\Pi(X)$ — множество сильно непрерывных отображений F полуоси $R_+ \equiv [0,+\infty)$ в банахово пространство $B(X)$ таких, что $F(0) = \mathbf{I}$.

Определение 2 [7]. Операторнозначные функции $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \Pi(X)$ называются эквивалентными по Чернову, если для любого $T > 0$ и любого $u \in X$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(\mathbf{G}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n - \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u \right\| = 0.$$

Определение 3 [7]. Обобщенным математическим ожиданием случайной полугруппы операторов ξ называется однопараметрическая полугруппа $\mathbf{U}$, эквивалентная по Чернову математическому ожиданию $M[\xi]$.

Теорема 2. *Пусть* ξ — *случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве* H *и пусть* $\mathbf{U}(\omega, t) = \exp(i\xi(\omega)t)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, — *соответствующая случайная полугруппа. Пусть существует такое плотное в пространстве* H *подпространство* $\mathcal{D}$, что $\int_\Omega \|\xi(\omega)u\|_H \, d\mu(\omega) < \infty$ *для любого* $u \in \mathcal{D}$. *Тогда если определенный на пространстве* $\mathcal{D}$ *равенством* $\hat{\mathbf{H}}u = \int_\Omega \xi(\omega)u d\mu(\omega)$ *оператор существенно самосопряжен, то среднее значение* $\hat{\mathbf{F}}(t) = \int_\Omega \mathbf{U}(\omega,t)d\mu(\omega)$, $t \geq 0$ *эквивалентно по Чернову полугруппе* $\hat{\mathbf{U}} = e^{it\hat{\mathbf{H}}}$, $t \geq 0$.

Если на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ определена случайная полугруппа $\mathbf{G}$, то ее генератором называется случайная величина $\mathbf{H_G}$ на том же вероятностном пространстве, определяемая условием: для каждого $\omega \in \Omega$ значение $\mathbf{H_G}(\omega)$ случайной величины $\mathbf{H_G}$ представляет собой генератор полугруппы $\mathbf{G}(\omega) \in \mathcal{S}(X)$. Случайная величина $\mathbf{H_G}$ принимает значение в множестве $\mathcal{G}(X)$ генераторов сильно непрерывных однопараметрических полугрупп, действующих в пространстве X. Топология $\tau_{\mathcal{G}}$ на множестве $\mathcal{G}(X)$ определяется условием, чтобы биекция $\mathcal{J}$ между $S(X)$ и $\mathcal{G}(X)$, при которой каждой полугруппе соответствует ее генератор, была гомеоморфизмом топологических пространств $(S(X), \tau_S)$ и $(\mathcal{G}(X), \tau_{\mathcal{G}})$. Таким образом, $\mathbf{H_G} = \mathcal{J} \circ \mathbf{G}$.

Определение 4. Случайным гамильтонианом будем называть измеримую функцию на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, принимающую значения в топологическом пространстве генераторов $(\mathcal{G}(X), \tau_{\mathcal{G}})$.

Если математическим ожиданием случайной полугруппы $\mathbf{G}$ является операторнозначная функция $\mathbf{F_G}$, эквивалентная по Чернову некоторой полугруппе $\mathbf{U_G}$, то генератор полугруппы $\mathbf{U_G}$ называется средним по Фейнману—Чернову случайного генератора $\mathbf{H_G}$ случайной полугруппы $\mathbf{G}$.

2. Линейное квантование. В качестве мотивировки для развития анализа случайных операторов рассмотрим процедуру квантования как случайную величину со значениями в множестве самосопряженных операторов. Существуют различные определения квантования такой гамильтоновой системы. Мы рассмотрим симметричные линейные квантования $Q_\omega, \omega \in \Omega$, (см. [1, 2]), каждое из которых сопоставляет функции Гамильтона h самосопряженный оператор $\mathbf{H}_\omega = Q_\omega(h)$ в гильбертовом пространстве E.

Определение 5. Задание на множестве линейных квантований структуры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется случайным линейным квантованием.

Случайное линейное квантование позволяет рассматривать квантовый гамильтониан системы как случайный самосопряженный оператор, а семейство унитарных групп $\exp(-it\mathbf{H}_\omega)$, $t \in R$, $\omega \in \Omega$, — как случайную группу, при условии, что при всех $t \in R$ отображение $\omega \to \exp(-it\mathbf{H}_\omega)$ является измеримым относительно слабой операторной топологии отображением $\Omega \to B(H)$. Последнее условие выполняется, если пространство Ω является дискретным.

Рассмотрим пример, когда случайный генератор может принимать лишь два значения $\hat{\mathbf{H}}_1$ и $\hat{\mathbf{H}}_2$ с вероятностями p_1 и p_2. Здесь $\hat{\mathbf{H}}_1$ и $\hat{\mathbf{H}}_2$ — эрмитовы операторы (гамильтонианы), порождающие полугруппы $\hat{\mathbf{U}}_1(t) = e^{it\hat{\mathbf{H}}_1}$, $t \geq 0$, и $\hat{\mathbf{U}}_2(t) = e^{it\hat{\mathbf{H}}_2}$, $t \geq 0$. Рассмотрим оператор $\hat{\mathbf{H}} = p_1\hat{\mathbf{H}}_1 + p_2\hat{\mathbf{H}}_2$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда вид квантового оператора зависит от правила квантования. Это, в частности, типичная ситуация для линейного квантования (см. [7]), когда гамильтониан представляет собой линейную комбинацию эрмитовых операторов, полученных по различным правилам квантования, например, по Йордану и по Вейлю. Пусть операторы $\hat{\mathbf{H}}_{1,2}$ таковы, что условия теоремы 1 выполнены. Тогда в соответствии с формулой (2) полугруппа $\hat{\mathbf{U}}(t) = e^{t\hat{\mathbf{H}}}$, $t \geq 0$, эквивалентна по Чернову линейной комбинации $P_1\hat{\mathbf{U}}_1 + p_2\hat{\mathbf{U}}_2$ указанных полугрупп.

3. Предельные теоремы. Пусть ξ_j, $j \in \mathbf{N}$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве H. Предельные теоремы характеризуют асимптотику при $n \to \infty$ распределений вероятности последовательности случайных величин $\{\eta_n\}$, представляющих некоторое усреднение последовательности $\{\xi_k\}$. Так, закон больших чисел характеризует предельное распределение усредненной случайной величины $\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\xi_n + \ldots + \frac{1}{n}\xi_1$, а центральная предельная теорема – предельное распределение случайной величины $\hat{\xi}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_n + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_1$.

Пусть $\xi_j, j \in \mathbf{N}$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(H)$ в гильбертовом пространстве H. Исследуем асимптотику при $n \to \infty$ распределений вероятности последовательности случайных величин $\{\Xi_n\}$, представляющих некоторые усредненные композиции операторнозначных случайных величин ξ_k. Например, при исследовании закона больших чисел для композиции независимых одинаково распределенных случайных полугрупп исследовалась асимптотика распределений усредненной случайной величины $\overline{\xi}_n = (\xi_n)^{\frac{1}{n}} \circ \ldots \circ (\xi_1)^{\frac{1}{n}}$ (см. [10]).

Определение 6. Пусть $\{\mathbf{U}_n(t), t \geq 0\}$ – последовательность независимых случайных полугрупп. Тогда последовательность $\{\mathbf{U}_n(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет закону больших чисел в сильной операторной топологии, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\left\|\left(\mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right) - \overline{\mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right)}\right)x\right\|_H > \epsilon\right\}\right) = 0 \quad (1)$$

при любых $x \in H$, $t > 0$ и $\epsilon > 0$.

Теорема 3. *Пусть ξ – случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве H, удовлетворяющая условиям теоремы* 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных гамильтонианов, распределение каждого из которых совпадает с распределением случайного гамильтониана ξ. Тогда для последовательности $\{e^{i\frac{t}{n}\xi_n} \circ \ldots \circ e^{i\frac{t}{n}\xi_1}, t \geq 0\}$ композиций независимых одинаково распределенных случайных полугрупп выполняется закон больших чисел в сильной операторной топологии* (1).

Исследуем топологии на пространстве мер на банаховых пространствах, задаваемых по следующей схеме. Задается отображение Ψ, сопоставляющее мере μ на банаховом пространстве E линейный оператор $\Phi_\mu \in \mathcal{L}(X)$ свертки с мерой μ произвольной функции u из некоторого топологического векторного пространства X измеримых числовых функций на пространстве E:

$$\Phi_\mu u(x) = (\mathrm{M}S_\xi)u(x) = \int_E u(x-y)d\mu(y), \quad u \in X.$$

Отображение Ψ индуцирует топологию на пространстве мер на пространстве E по некоторой топологии на пространстве линейных операторов $\mathcal{L}(X)$, действующих в пространстве X.

Пусть E – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(E)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств E. Пусть $ca(E, \mathcal{B}(E))$ – банахово пространство борелевских мер ограниченной вариации на измеримом пространстве $(E, \mathcal{B}(E))$. Пусть X – некоторое локально выпуклое пространство функций $u : E \to \mathbb{C}$, а $\mathcal{L}(X)$ – локально выпуклое пространство линейных ограниченных операторов в пространстве X.

Теорема 4. *Слабая сходимость последовательности борелевских мер $\{\mu_n\}$ на пространстве E равносильна поточечной сходимости операторов в топологическом векторном пространстве $(C_b(E), \tau)$, где τ – топология поточечной сходимости на E.*

Пусть $E = R^d$, $X = C_b(R^d)$ наделено топологией поточечной сходимости. Последовательность $\{\mu_n\}$ борелевских мер на пространстве E с ограниченной вариацией называется сходящейся слабо к мере $\mu \in ca(E, \mathcal{B}(E))$, если для каждой функции $f \in C_b(E)$ выполняется равенство $\lim_{n\to\infty}\int_E f(x)d\mu_n(x) = \int_E f(x)d\mu(x)$. Это условие равносильно тому, что для каждого $f \in C_b(E)$ и каждого $h \in E$ выполняется равенство $\lim_{n\to\infty}\int_E f(x-h)d\mu_n(h) = \int_E f(x-h)d\mu(h)$. Это и означает, что последовательности линейных операторов $\{\Psi(\mu_n)\}$, действующих в топологическом векторном пространстве $(C_b(E, \tau)$, сходится поточечно к оператору $\Psi(\mu)$.

Определение 7. Последовательность мер $\{\mu_n\}: \mathbb{N} \to ca(E, \mathcal{B}(E))$ называется сходящейся $\mathcal{L}(X)$-слабо к мере $\mu \in ca(E, \mathcal{B}(E))$, если последовательность операторов Φ_{μ_n}, действующих в пространстве X по правилу $\Phi_{\mu_n}u(x) = \int_E u(x-y)d\mu_n(y)$, $u \in X$, $x \in E$, сходится в пространстве $\mathcal{L}(X)$ к оператору Φ_μ, действующему по правилу $\Phi_\mu u(x) = \int_E u(x-y)d\mu(y)$, $u \in X$, $x \in E$.

Определение 8. Последовательность случайных величин ξ_n со значениями в пространстве E называется сходящейся по распределению $\mathcal{L}(X)$-слабо к случайной величине ξ, если последовательность борелевских мер μ_n, определяемых равенствами $\mu_n(A) = P(\xi_n^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}(E)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится $\mathcal{L}(X)$-слабо к мере μ, определяемой равенством $\mu(A) = P(\xi^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}(E)$.

Если топология τ_X пространства X задается семейством полунорм $\{\phi_a, a \in A\}$, а топология τ_{sot} в пространстве ограниченных линейных операторов $B(X)$ является сильной операторной, то $(B(X), \tau_{sot})$-слабая топология на пространстве мер $ca(E, \mathcal{B}(E))$ задается семейством функционалов $\{\Phi_{a,u}, a \in A, u \in X\}$, определяемых равенствами

$$\Phi_{a,u}(\mu) = \phi_a\left(\int_E u(x-y)d\mu(y)\right), \quad \mu \in ca(E, \mathcal{B}(E)).$$

Теорема 5. *Пусть* $\xi(t), t \geq 0$, — *случайный процесс со значениями в пространстве* E; $\{\xi_n\}$ — *последовательность независимых случайных процессов, распределение каждого из которых совпадает с распределением процесса* ξ. *Пусть* X — *банахово пространство функций* $u: E \to \mathbb{C}$ *такое, что для любого* $t \geq 0$ *линейный оператор* $u \to \mathbf{F}(t)u = \mathrm{M}(\mathbf{S}_{\xi(t)}u)$ *определен на пространстве X. Тогда если оператор-функция* $\mathbf{F}(t), t \geq 0$, *удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то последовательность случайных процессов* $\{\eta_n(t), t \geq 0\}$, *где* $\eta_n(t) = \xi_n\left(\frac{t}{n}\right) + \ldots + \xi_1\left(\frac{t}{n}\right)$, *сходится по распределению* $(B(X), \tau_{sot})$-*слабо к марковскому случайному процессу, порождающему полугруппу* $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t \geq 0$.

Равенство $\mathrm{M}(\mathbf{S}_{\xi_n(t)} \circ \ldots \circ \mathbf{S}_{\xi_1(t)}u) = (\mathbf{F}(t))^n u$ справедливо при всех $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ в силу независимости процессов $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ [10]. Так как функция $\mathbf{F}$ удовлетворяет условиям теоремы Чернова, то для любого $u \in X$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \mathrm{M}(\mathbf{S}_{\xi_n(\frac{t}{n})+\ldots+\xi_1(\frac{t}{n})}u) - \exp(\mathbf{F}'(0)t)u \right\|_X = 0$$
$$\forall T > 0.$$

Это означает $(B(X), \tau_{sot})$-слабую сходимость по распределению последовательности случайных процессов $\{\eta_n(t), t \geq 0\}$ к марковскому случайному процессу, порождающему полугруппу $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t \geq 0$.

Замечание. Для последовательности композиций независимых случайных операторов сдвига на вектор евклидова пространства утверждение теоремы 5 включает утверждение центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных векторов, если в качестве пространства X выбрать пространство $C_b(E)$ с топологией поточечной сходимости.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Дж. Гоф благодарит за финансовую поддержку Национальное Агентство Исследований Франции, грант Q-COAST ANR- 19-CE48-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин Ф.А.* Невинеровские континуальные интегралы // ТМФ. 1971. Т. 6. № 2. С. 194–212.
2. *Орлов Ю.Н.* Основы квантования вырожденных динамических систем. М.: МФТИ, 2004. 236 с.
3. *Bonaccorsi S., Cottini F., Mugnolo D.* Random Evolution Equations: Well-Posedness, Asymptotics, and Applications to Graphs // Appl Math Optim. 2021. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09732-w
4. *Butko Ya.A.* Chernoff approximation of subordinate semigroups // Stochastics and Dynamics. https://doi.org/10.1142/S0219493718500211
5. *Remizov I.D.* Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients // J. of Mathematical Physics. 2019. V. 60. № 7. 071505.
6. *Волович И.В.* Уравнения Боголюбова и функциональная механика // ТМФ. 2010. Т. 164. № 3. С. 354–362.
7. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
8. *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.
9. *Sinha K.B., Srivastava S.* Theory of Semigroups and Applications / Texts and Readings in Mathematics. 2017. V. 74. Hindustan Book Agency.
10. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп// Труды МИАН. 2019. Т. 306. С. 210–226.

RANDOM QUANTIZATION OF HAMILTONIAN SYSTEMS

J. Gough[a], Yu. N. Orlov[b,c], V. Zh. Sakbaev[b,d], and O. G. Smolyanov[d,e]

[a] *Aberystwyth University, Wales, United Kingdom, Moscow, Russian Federation*

[b] *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[c] *Institute of Machines Science named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[d] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[e] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A quantization of Hamiltonian system is an ambiguous procedure. Therefore we introduce the notion of random quantization, related random variables with values in the set of self-adjoint operators and random processes with values in the group of unitary operators. The procedures of averaging of random unitary group and averaging of random self-adjoint operators are defined. The generalized convergence of the sequence of measures and the corresponding generalized convergence of the sequence of random variables by distribution are introduced. The generalized convergence in distribution for some sequences of compositions of random mappings is obtained. In the case of the sequence of compositions of shifts on independent random vectors of euclidean space the obtained convergence coincides with the statement of central limit theorem for a sum of independent random vectors. Obtained results are appieded to the dynamics of quantum systems arising in random quantization of Hamiltonian system.

Keywords: random linear operator, random operator valued function, operator valued random process, law of large numbers, central limit theorem, Markovian process, Kolmogorov equation