ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 41–44

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МАРАНГОНИ В СРЕДЕ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

© 2021 г. **М. А. Кисатов**[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.01.2021 г.
Поступило 25.01.2021 г.
После доработки 19.03.2021 г.
Принято к публикации 21.03.2021 г.

Изучается система уравнений пограничного слоя нелинейной обобщенно-ньютоновской вязкой жидкости, модификацию которой предложила О.А. Ладыженская. Для доказательства корректной разрешимости поставленной задачи в работе применяется метод преобразования фон Мизеса, который переводит систему пограничного слоя в одно квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение.

Ключевые слова: преобразование Мизеса, пограничный слой Марангони, реология, неньютоновские среды

DOI: 10.31857/S2686954321030097

Слоем К. Марангони называется одна из разновидностей внутренних пограничных слоев (см. работы [1], [2]), возникающих вблизи границы раздела двух вязких сплошных сред (см. рис. 1). Марангони в 1865 г. исследовал такое явление, связанное с различием коэффициентов поверхностного натяжения в средах, которое возникает с изменением концентрации веществ или температуры.

Позже, в 1961 г., эффект Марангони был описан в терминах термогидродинамики С. Чандрасекаром. Вытекающие из этой теории задачи решались в ряде работ на физическом уровне строгости. Математически строгий подход к решению задач, связанных с эффектом Марангони, имеется, к примеру, в [3]. При этом применяется также теория Л. Прандтля, весьма эффективная при рассмотрении тонких слоев жидкости.

Во всех этих работах среда предполагается ньютоновской (см. также недавние работы [4–6]). В данной работе излагаются результаты о корректной разрешимости задачи о слое Марангони в нелинейно вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской. Подобные задачи для пограничного слоя типа Прандтля рассматривались в работах [7–10]. Задачи были исследованы с помощью преобразования Крокко в работах [11, 12] и с помощью преобразования фон Мизеса в [13].

Примером такой неньютоновской среды могут служить некоторые виды лиотропных жидких кристаллов (см., например, [14]).

Для исследования мы применяем преобразование Мизеса, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассматривается модифицированная стационарная система уравнений двумерного движения вязкой несжимаемой жидкости вида (см. [7])

$$\begin{gathered}-\nu\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}((1+kB^2(u))B_{ij}(u))+\\+\sum_{j=1}^{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},\quad i=1,2,\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

$$B_{ij}(u)=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\qquad B^2(u)=\sum_{i,j=1}^{2}B_{ij}^2(u),$$

где ν – кинематическая вязкость, k – малая положительная постоянная, p – давление, ρ – плотность (без ограничения общности считаем, что

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: kisatov@mail.ru*

Рис. 1. Пограничный слой Марангони на стенках.

плотность равна единице); x_1, x_2 — координаты, а u_1 и u_2 — соответствующие этим направлениям компоненты скорости. Далее компоненты скорости для удобства обозначим следующим образом:

$$u_1(x,y) = u(x,y), \quad u_2(x,y) = v(x,y)$$

и будем рассматривать систему уравнений (1) в полуполосе $\Pi = \{0 < x < X, 0 < y < +\infty\}$.

К уравнениям (1) добавляются граничные условия:

$$v|_{y=0} = v_0(x), \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u_0(y), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \hat{A}(x), \tag{4}$$

$$(u,v) \to (U,0) \quad \text{при} \quad y \to +\infty. \tag{5}$$

Условие (4) описывает поверхностное натяжение жидкости на границе $y = 0$. Это условие является отличительной особенностью задачи Марангони от задачи Прандтля. Предполагается, что число Рейнольдса $Re = \frac{UX}{\nu}$ достаточно большое (число $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ — малое). Вводя новые переменные

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{\varepsilon}$$

и новые неизвестные функции

$$\tilde{u}(x',y') = u(x',\varepsilon y'),$$
$$\tilde{v}(x',y') = \frac{v(x',\varepsilon y') - v_0(x')}{\varepsilon},$$

преобразуем систему, группируя слагаемые по порядку малости, относительно ε. Затем, возвращаясь к старым переменным, убрав некоторые малые слагаемые, получаем систему уравнений пограничного слоя, которая имеет следующий вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(1 + 3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Система уравнений (6), (7) рассматривается в области

$$D = \{0 < x < X, \ 0 < y < \infty\}. \tag{8}$$

К уравнениям (6), (7) присоединяются граничные условия вида (2)–(5):

$$v|_{y=0} = v_0(x), \quad u|_{x=0} = u_0(y),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \hat{A}(x), \quad u \to U(x) \quad \text{при} \quad y \to +\infty.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть функции u и v удовлетворяют системе* (6), (7) *в области* $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, *непрерывны в* $\overline{D}$ *и удовлетворяют условиям* (2)–(5); *пусть, кроме того, выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} 0 < u < C_1, \quad y > 0, \\ C_2 y \le u \le C_3 y, \quad 0 < y < y_0, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \le C_4, \quad (x,y) \in D, \tag{10}$$

где C_j, $j = 1,\dots,4$, *и* y_0 *— некоторые положительные постоянные. Тогда* u, v *— единственное решение задачи* (6), (7), (2)–(5) *с указанными свойствами.*

2. ПЕРЕМЕННЫЕ МИЗЕСА

Система уравнений (6), (7) с помощью замены переменных (см. [7])

$$x = x, \quad \psi = \psi(x,y),$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v - v_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi|_{y=0} = 0,$$

$$w(x, \psi) = u^2(x, y),$$

сводится к квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \nu\sqrt{w}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - v_0\frac{\partial w}{\partial \psi} + W'(x), \quad (11)$$

где $W(x) = U^2(x)$, в области $\mathrm{G} = \{0 < x < X, 0 < \psi < +\infty\}$. Граничные условия (2)–(5) принимают вид

$$w|_{x=0} = w_0(\psi), \quad (12)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = A(x) = 2\hat{A}(x), \quad (13)$$

$$w(x, \psi) \to W(x) \text{ равномерно при } \psi \to +\infty. \quad (14)$$

Пусть в области G выполняется уравнение (11) вместе с граничными условиями (12)–(14), тогда справедлива

Теорема 2. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

$$A(x), W(x) \in C^1[0, X],$$
$$w_0(\psi) \in C^{2+\beta}[0, \infty), \quad \beta > 0;$$
$$A(x) \le 0, \quad W(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0, X]; \quad (15)$$
$$w_0(\psi) > W(0) \quad \forall \psi \in [0, \infty), \quad w_0'(0) = A(0);$$
$$w_0(\psi) \to W(0) \quad \text{при} \quad \psi \to \infty,$$

и пусть существует постоянная $C > 0$, *такая что*

$$\left|\nu\sqrt{w_0}\left(1 + \frac{3}{4}k(w_0')^2\right)w_0'' - v_0 w_0'\right| \le C(w_0(\psi) - W(0)). \quad (16)$$

Тогда существует единственное решение задачи (11)–(14), *такое что* w, $\frac{\partial w}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ *непрерывны и ограничены в замкнутой области* $\overline{G}$.

На основе этой теоремы с помощью обратной замены переменных получаем доказательство основного результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определенный интерес представляют обобщения рассмотренной задачи на случай электропроводных сред в магнитных полях различной направленности и с учетом явлений теплопередачи и параметров, зависящих от температуры.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Napolitano L.G.* Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. symp. on material sci. in space. Grenoble, 1979. P. 349–358.
2. *Batishchev V.A., Kuznetsov V.V., Pukhnachov V.V.* Marangoni boundary layers // Prog. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.
3. *Кузнецов В.В.* Пограничные слои Марангони: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Новосибирск, 1984. С. 29–42.
4. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 651.
5. *Пухначев В.В.* Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского гос. ун-та. 2011. № 1–2. С. 62.
6. *Ortiz-Pèrez A.S., Dàvalos-Orozco L.A.* Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient // Phys. Fluids. 2011. № 28 (3). P. 084107–084111.
7. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 329–361.
8. *Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 158–176.
9. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. С. 83–100.
10. *Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P., Samokhin V.N.* On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // C R Mécanique. 2018. Т. 346. № 9. P. 807–814.
11. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // ДАН. 2019. Т. 487. № 2. С. 119–125.
12. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О нестационарном пограничном слое вязкой реологически сложной жидкости // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 310. С. 40–77.
13. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 508 с.
14. *Кирсанов Е.А., Матвеенко В.Н.* Неньютоновское течение дисперсных, полимерных и жидкокристаллических систем. Структурный подход. М.: Техносфера, 2016. 384 с.

SYSTEM OF EQUATIONS FOR THE MARANGONI BOUNDARY LAYER IN MEDIA WITH RHEOLOGICAL LAW OF O.A. LADYZHENSKAYA

M. A. Kisatov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

One studies the system of equations of the boundary layer of nonlinearly generalized Newtonian viscous fluid with the O.A. Ladyzhenskaya law. To prove the corrected solution of the problem, we use the von Mises transform method, which transform the system of equations of the boundary layer into a quasilinear degenerate parabolic equation.

Keywords: Von Mises transformation, the Marangoni boundary layer, rheologi, non-Newtonian media