ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 45–50

МАТЕМАТИКА

УДК 519.17

ТРИ БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕРИИ ГРАФОВ ШИЛЛА НЕ СУЩЕСТВУЮТ

 Член-корреспондент РАН **А. А. Махнев**[1,*], **И. Н. Белоусов**[1,**], **М. П. Голубятников**[1,***], **М. С. Нирова**[2,****]

Поступило 30.03.2021 г.
После доработки 30.03.2021 г.
Принято к публикации 27.04.2021 г.

Графом Шилла называется дистанционно-регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Ранее были найдены три бесконечные серии графов Шилла с допустимыми массивами пересечений: $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$ (И.Н. Белоусов), $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ (Кулен, Пак), и $(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ (И.Н. Белоусов). В работе доказано, что в первой серии существует единственный граф — обобщенный шестиугольник порядка 2, а во второй и третьей сериях графов нет.

Ключевые слова: дистанционно-регулярный граф, граф Шилла, тройные числа пересечений

DOI: 10.31857/S2686954321030115

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Дистанционно-регулярные графы с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ определены в [1]. Пусть $k = b_0$, $a_i = k - b_i - c_i$.

Для дистанционно-регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\max\{a_3, (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1 = a_3$ по [2] имеем $\theta_1 = (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2$. Графом Шилла называется дистанционно-регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$.

Пусть Γ является графом Шилла. Тогда $a_1 = a - b$, Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ и собственные значения θ_2, θ_3, являющиеся корнями уравнения $x^2 - (a_2 + a - b - ab)x + (b-1)b_2 - a_2 = 0$. Если θ_2, θ_3 — целые числа, то $(a_2 + a - b - ab)^2 - 4((b-1)b_2 - a_2)$ является квадратом натурального числа, в противном случае кратности θ_2 и θ_3 совпадают.

Известные графы Шилла — это нечетный граф $O(4)$ с массивом пересечений $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$, граф Хэмминга $H(3, 3)$ с массивом пересечений $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$, обобщенный шестиугольник $GH(2, 2)$ с массивом пересечений $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$, граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$, граф Доро с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, унитарные графы на множестве неизотропных векторов с массивами пересечений $\{q(q+1), (q+2)(q-1), q+2; 1, 1, q^2-1\}$, q — степень простого числа, или граф Джонсона $J(9, 3)$ с массивом пересечений $\{18, 10, 4; 1, 4, 9\}$.

Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$. Если собственные значения графа θ_2, θ_3 графа Γ имеют одинаковые кратности, то Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1,$

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
[2] *Кабардино-Балкарский государственный университет им. Бербекова, Нальчик, Россия*
**E-mail: makhnev@imm.uran.ru*
***E-mail: i_belousov@mail.ru*
****E-mail: mike_ru1@mail.ru*
*****E-mail: nirova_m@mail.ru*

$b(b-1)/4,\ b(b-1)^2/2\}$, b сравнимо с 0 или 1 по модулю 4 [2].

Графы Шилла с $b_2 = c_2$ изучались также в [3, 4]. Для двупараметрического семейства массивов пересечений $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)),\ (2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1),\ r^2l(2r-1);1,\ r^2l(2r-1),\ r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$ существует лишь конечное число графов ($(l,r)\in\{(1,2),(2,1),(4,1),(6,1)\}$) (см. [4, теорема 2]).

В работе [5] найдены следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла:

(1) $\{(2c_2-1)c_2(2c_2^2-1),\ 2c_2^2((2c_2-1)c_2-1),\ 2c_2^2;\ 1,\ c_2,\ (2c_2^2-1)((2c_2-1)c_2-1\}$;

(2) $\{b(b^2-1),\ b^2(b-1),\ b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$;

(3) $\{b(b+1),\ (b+2)(b-1),\ b+2;1,1,b^2-1\}$;

(4) $\{2b(b-1),\ (2b-1)(b-1),\ 2b-1;1,1,2(b-1)^2\}$;

(5) $\{(s+1)(s^3-1),\ s^4,\ s^3;1,s^2,s(s^3-1)\}$, $s>2$.

Предлагается программа изучения графов Шилла с массивами пересечений из этих серий.

Заметим, что в серии $\{2b(b-1),\ (2b-1)(b-1),\ 2b-1;1,1,2(b-1)^2\}$ имеется только 3 допустимых массива пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$, $\{12,10,5;1,1,8\}$ и $\{84,78,13;1,1,72\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* Γ *является дистанционно-регулярным графом с массивом пересечений* $\{b(b^2-1),\ b^2(b-1),\ b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$. *Тогда* $b\in\{2,3\}$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* Γ *является дистанционно-регулярным графом с массивом пересечений* $\{b(b^2-1),\ b^2(b-1),\ b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$. *Тогда* $b=2$ *и* Γ *— обобщенный шестиугольник порядка* $(2,2)$ *с массивом пересечений* $\{6,4,4;1,1,3\}$.

Т е о р е м а 2. *Дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений* $\{b^2(b-1)/2,\ (b-1)(b^2-b+2)/2,\ b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$ *не существует*.

Граф Шилла Γ с массивом пересечений $\{(s+1)(s^3-1),\ s^4,\ s^3;1,s^2,s(s^3-1)\}$ является Q-полиномиальным.

Т е о р е м а 3. *Дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений* $\{(s+1)(s^3-1),\ s^4,\ s^3;\ 1,\ s^2,\ s(s^3-1)\}$ *не существует*.

Доказательство следствия 1 и теоремы 2 опирается на вычисление тройных чисел пересечений [6].

Пусть Γ — дистанционно-регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d. Через $\left\{\begin{matrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{matrix}\right\}$ обозначим множество вершин $w\in\Gamma$ таких, что $d(w,u_i)=r_i$, а через $\left[\begin{matrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{matrix}\right]$ — число вершин в $\left\{\begin{matrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{matrix}\right\}$. Числа $\left[\begin{matrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{matrix}\right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1,u_2,u_3 вместо $\left[\begin{matrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{matrix}\right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако в [6] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u,v,w — вершины графа Γ, $W=d(u,v)$, $U=d(v,w)$, $V=d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x,u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u,v,w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh]=p_{jh}^{U}-[0jh],\qquad \sum_{l=1}^{d}[ilh]=p_{ih}^{V}-[i0h],$$
$$\sum_{l=1}^{d}[ijl]=p_{ij}^{W}-[ij0]\,(+).$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j|>W$ или $i+j<W$ имеем $p_{ij}^{W}=0$, поэтому $[ijh]=0$ для всех $h\in\{0,\ldots,d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w)=\sum\limits_{r,s,t=0}^{d}Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{matrix}uvw\\ rst\end{matrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h}=0$, то $S_{ijh}(u,v,w)=0$.

Зафиксируем вершины u,v,w дистанционно-регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\}=\left\{\begin{matrix}uvw\\ ijh\end{matrix}\right\}$, $[ijh]=\left[\begin{matrix}uvw\\ ijh\end{matrix}\right]$, $[ijh]'=\left[\begin{matrix}uwv\\ ihj\end{matrix}\right]$, $[ijh]^*=\left[\begin{matrix}vuw\\ jih\end{matrix}\right]$ и $[ijh]^\sim=\left[\begin{matrix}wvu\\ hji\end{matrix}\right]$. В случаях $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$ или $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$ вычисление параметров $[ijh]'=\left[\begin{matrix}uwv\\ ihj\end{matrix}\right]$, $[ijh]^*=\left[\begin{matrix}vuw\\ jih\end{matrix}\right]$ и $[ijh]^\sim=\left[\begin{matrix}wvu\\ hji\end{matrix}\right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Пусть Γ является дистанционно-регулярным графом с массивом пересечений $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$. Тогда $a_1 = b^2 - b - 1$ и окрестность любой вершины в Γ является объединением $b+1$ изолированных (b^2-b)-клик.

Пусть a, z — вершины, находящиеся на расстоянии 3 в Γ. Если $[z] \cap \Gamma_2(a)$ содержит $(b+2)$-клику K, то две подходящие вершины из K смежны с вершинами некоторой клики из $[a] \cap \Gamma_2(z)$. Противоречие с тем, что тогда Γ содержит четырехугольник.

Значит, порядок любой клики из $[z] \cap \Gamma_2(a)$ не больше $b+1$ и $(b^2-1)(b-1)/(b+1) \le b+1$. Отсюда $(b-1)^2 \le b+1$ и $b \le 3$. Теорема 1 доказана.

Пусть $b = 3$ и Γ — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$. Тогда Γ имеет $1 + 24 + 432 + 243 = 700$ вершин, спектр: 24^1, 8^{175}, -1^{224}, -4^{300} и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 175 & 224 & 300 \\ 1 & \frac{175}{3} & -\frac{28}{3} & -50 \\ 1 & 0 & -\frac{28}{3} & \frac{25}{3} \\ 1 & -\frac{175}{27} & \frac{448}{27} & -\frac{100}{9} \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 1. *Числа пересечений графа* Γ *равны*

1) $p^1_{11} = 5$, $p^1_{21} = 18$, $p^1_{32} = 162$, $p^1_{22} = 252$, $p^1_{33} = 81$;

2) $p^2_{11} = 1$, $p^2_{12} = 14$, $p^2_{13} = 9$, $p^2_{22} = 264$, $p^2_{23} = 153$, $p^2_{33} = 81$;

3) $p^3_{12} = 16$, $p^3_{13} = 8$, $p^3_{22} = 272$, $p^3_{23} = 144$, $p^3_{33} = 90$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямые вычисления.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 264 на 432 вершинах.

Л е м м а 2. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 1$. *Тогда выполняются равенства*:

$$[111] = -r_5 + 1, \quad [112] = [121] = r_5,$$
$$[122] = -r_4 - r_5 + 14, \quad [123] = [132] = r_4,$$
$$[133] = -r_4 + 9;$$

$$[211] = r_5 - r_6 - r_7 + 148,$$
$$[212] = [221] = -r_5 + r_6 + r_7 - 135,$$
$$[222] = r_4 + r_5 - r_7 + 237,$$
$$[223] = [232] = -r_4 - r_6 + 162, \quad [233] = r_4 + r_6 - 9;$$

$$[311] = r_6 + r_7 - 144,$$
$$[312] = [321] = -r_6 - r_7 + 153, \quad [322] = r_7,$$
$$[323] = [332] = r_6, \quad [333] = -r_6 + 81,$$

где $r_4 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $r_5 \in \{0, 1\}$, $r_6 \in \{0, 1, \ldots, 81\}$ *и* $r_7 \in \{63, 64, \ldots, 149\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощения формул (+).

Имеем $p^2_{23} = 153$, поэтому $[223] = -r_4 - r_6 + 162 \le 153$ и $9 \le r_4 + r_6$. По лемме 2 имеем $88 \le [222] = r_4 + r_5 - r_7 + 237 \le 184$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит $530 - [222]$ вершин, то $98 \le [222] \le 184$.

Л е м м а 3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 3$. *Тогда либо* $r_{25} = 0$ *и выполняются равенства*:

1) $[112] = [121] = 0$, $[113] = [131] = 1$, $[122] = -r_{22} + 14$, $[123] = [132] = r_{22}$, $[133] = -r_{22} + 8$;

2) $[212] = r_{26} + 7$, $[213] = -r_{26} + 7$, $[221] = -r_{27} + 14$, $[222] = -r_{24} - r_{26} + 257$, $[223] = r_{24} + r_{26} + r_{27} - 7$, $[231] = r_{27}$, $[232] = r_{24}$, $[233] = -r_{24} - r_{27} + 152$;

3) $[312] = -r_{26} + 9$, $[313] = r_{26}$, $[321] = r_{27} + 2$, $[322] = r_{22} + r_{24} + r_{26}$, $[323] = -r_{22} - r_{24} - r_{26} - r_{27} + 151$, $[331] = -r_{27} + 7$, $[332] = -r_{22} - r_{24} + 144$, $[333] = r_{22} + r_{24} + r_{27} - 70$,

$r_{22} \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, $r_{24} \in \{55, 56, \ldots, 151\}$, $r_{27} \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $r_{26} \in \{0, 1, \ldots, 7\}$,

либо $r_{25} = 1$ *и выполняются равенства*:

4) $[112] = [121] = 1$, $[113] = [131] = 0$, $[122] = -r_{22} + 13$, $[123] = [132] = r_{22}$, $[133] = -r_{22} + 9$;

5) $[212] = r_{26} + 6$, $[213] = -r_{26} + 8$, $[221] = -r_{27} + 14$, $[222] = -r_{24} - r_{26} + 258$, $[223] = r_{24} + r_{26} + r_{27} - 8$, $[231] = r_{27}$, $[232] = r_{24}$, $[233] = -r_{24} - r_{27} + 152$;

6) $[312] = -r_{26} + 9$, $[313] = r_{26}$, $[321] = r_{27} + 1$, $[322] = r_{22} + r_{24} + r_{26}$, $[323] = -r_{22} - r_{24} - r_{26} - r_{27} + 152$, $[331] = -r_{27} + 8$, $[332] = -r_{22} - r_{24} + 144$, $[333] = r_{22} + r_{24} + r_{27} - 71$,

$r_{22} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $r_{24} \in \{54, 55, \ldots, 151\}$, $r_{27} \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, $r_{26} \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощения формул (+) дают равенства

$[112] = r_{25}$, $[113] = -r_{25} + 1$, $[121] = r_{23}$, $[122] = -r_{22} - r_{23} + 14$, $[123] = r_{22}$, $[131] = -r_{23} + 1$, $[132] = r_{22} + r_{23} - r_{25}$, $[133] = -r_{22} + r_{25} + 8$;

$[212] = -r_{25} + r_{26} + 7$, $[213] = r_{25} - r_{26} + 7$, $[221] = -r_{27} + 14$, $[222] = -r_{24} + r_{25} - r_{26}$, $[223] = r_{24} - r_{25} + r_{26} + r_{27} - 7$, $[231] = r_{27}$, $[232] = r_{24}$, $[233] = -r_{24} - r_{27} + 152$;

$[312] = -r_{26} + 9$, $[313] = r_{26}$, $[321] = -r_{23} + r_{27} + 2$, $[322] = r_{22} + r_{23} + r_{24} - r_{25} + r_{26}$, $[323] = -r_{22} - r_{24} + r_{25} - r_{26} - r_{27} + 151$, $[331] = r_{23} - r_{27} + 7$, $[332] =$

$= -r_{22} - r_{23} - r_{24} + r_{25} + 144$, $[333] = r_{22} + r_{24} - r_{25} + r_{27} - 70$,

где r_{22}, $r_{27} \in \{0,1,\ldots,14\}$, $r_{23} \in \{0,1,\ldots,7\}$, $r_{24} \in \{0,1,\ldots,152\}$, $r_{25} \in \{0,1\}$, $r_{26} \in \{0,1,\ldots,9\}$.

Симметризация. Верны равенства $[112] = r_{25} = [121]' = r'_{23}$, $[122] = -r_{22} - r_{23} + 14$, поэтому $r_{22} + r_{23} = r'_{22} = r'_{23}$,

Далее, $[212] = -r_{25} + r_{26} + 7 = [221]' = -r'_{27} + 14$, поэтому $-r_{25} + r_{26} + r'_{27} = 7$, $[233] = -r_{24} - r_{27} + 152$ и $r_{24} + r_{27} = r'_{24} + r'_{27}$.

Пусть $r_{25} = 0$. Тогда $r'_{23} = 0$, $r_{22} + r_{23} = r'_{22} = r_{22}$ и $r_{26} + r'_{27} = 7$. Отсюда $r_{23} = 0$ и выполняются равенства (1–3).

Пусть $r_{25} = 1$. Тогда $r'_{23} = 1$, $r_{22} + r_{23} = r'_{22} + 1 = r_{22} + 1$ и $r_{26} + r'_{27} = 8$. Отсюда $r_{23} = 1$ и выполняются равенства (4–6). Лемма доказана.

По лемме 3 имеем $99 \le [222] = -r_{24} + r_{25} - r_{26} + 257 \le 204$.

Л е м м а 4. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда либо* $r_{16} = 1$ *и выполняются равенства*:

1) $[111] = 0$, $[112] = [121] = 1$, $[113] = [131] = 0$, $[122] = 13 - r_{14}$, $[123] = [132] = r_{14}$, $[133] = 9 - r_{14}$;

2) $[211] = 1$, $[212] = [221] = 13 - r_{14}$, $[213] = [231] = r_{14}$, $[222] = r_{14} - r_{15} + 250$, $[223] = [232] = r_{15}$, $[233] = -r_{14} - r_{15} + 153$;

3) $[311] = 0$, $[312] = [321] = r_{14}$, $[313] = [331] = -r_{14} + 9$, $[322] = r_{15}$, $[323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153$, $[333] = 2r_{14} + r_{15} - 81$,

либо $r_{20} = 1$ *и выполняются равенства:*

4) $[111] = [112] = [121] = 0$, $[113] = [131] = 1$, $[122] = 14 - r_{14}$, $[123] = [132] = r_{14}$, $[133] = 8 - r_{14}$;

5) $[211] = 0$, $[212] = [221] = 14 - r_{14}$, $[213] = [231] = r_{14}$, $[222] = r_{14} - r_{15} + 249$, $[223] = [232] = r_{15}$, $[233] = -r_{14} - r_{15} + 153$;

6) $[311] = 1$, $[312] = [321] = r_{14}$, $[313] = [331] = -r_{14} + 8$, $[322] = r_{15}$, $[323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153$, $[333] = 2r_{14} + r_{15} - 80$,

либо $r_{16} = r_{20} = 0$ *и выполняются равенства*:

7) $[111] = 1$, $[112] = [121] = [113] = [131] = 0$, $[122] = 14 - r_{14}$, $[123] = [132] = r_{14}$, $[133] = 9 - r_{14}$;

8) $[211] = 0$, $[212] = [221] = 14 - r_{14}$, $[213] = [231] = r_{14}$, $[222] = r_{14} - r_{15} + 249$, $[223] = [232] = r_{15}$, $[233] = -r_{14} - r_{15} = 153$;

9) $[311] = 0$, $[312] = [321] = r_{14}$, $[313] = [331] = -r_{14} + 9$, $[322] = r_{15}$, $[323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153$, $[333] = 2r_{14} + r_{15} - 81$,

где $r_{14} \in \{0,1,\ldots,9\}$, $r_{15} \in \{63,64,\ldots,153\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощения формул (+) дают равенства

$[111] = -r_{14} - r_{15} - r_{16} + r_{18} - r_{20} + r_{21} + 1$, $[112] = r_{16}$, $[113] = r_{14} + r_{15} - r_{18} + r_{20} - r_{21}$, $[121] = r_{19}$, $[122] = r_{17}$, $[123] = -r_{17} - r_{19} + 14$,
$[131] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{19} + r_{20} - r_{21}$, $[132] = -r_{16} - r_{17} + 14$, $[133] = -r_{14} - r_{15} + r_{17} + r_{18} + r_{19} - r_{20} + r_{21} - 5$;

$[211] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{21}$, $[212] = -r_{14} - r_{16} + 14$, $[213] = -r_{15} + r_{18} + r_{21}$, $[221] = -r_{14} - r_{15} - r_{16} + r_{21} + 14$, $[222] = r_{14} + r_{16} - r_{21} + 249$, $[223] = r_{15}$, $[231] = r_{18}$, $[232] = r_{21}$, $[233] = -r_{18} - r_{21} + 153$;

$[311] = r_{20}$, $[312] = r_{14}$, $[313] = -r_{14} - r_{20} + 9$, $[321] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{19} - r_{21}$, $[322] = -r_{14} - r_{16} - r_{17} + r_{21} + 14$, $[323] = -r_{15} + r_{17} + r_{19} + 139$, $[331] = -r_{14} - r_{15} - r_{16} + r_{19} - r_{20} + r_{21} + 9$, $[332] = r_{16} + r_{17} - r_{21} + 139$, $[333] = r_{14} + r_{15} - r_{17} - r_{19} + r_{20} - 67$,

где $r_{14}, r_{20} \in \{0,1,\ldots,9\}$, $r_{15} \in \{0,1,\ldots,167\}$, r_{16}, r_{17}, $r_{19} \in \{0,1,\ldots,14\}$, $r_{18}, r_{21} \in \{0,1,\ldots,153\}$.

Симметризация. Верны равенства $[112] = r_{16} = r^*_{16}$, $[121] = r_{19} = r^{\sim}_{19}$, $r_{16} = r'_{19}$, $[122] = r_{17} = r'_{17}$, $[223] = r_{15} = r^*_{15}$, $[232] = r_{21} = r^{\sim}_{21}$, $[311] = r_{20} = r'_{20}$, $[231] = r_{18}$, $[312] = r_{14}$ и $r^*_{18} = r'_{14}$.

Так как $[112] = r_{16} = r^*_{16}$, то $r'_{16} = r^{\sim}_{16}$, поэтому $[121]^* = r^*_{19} = [211] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{21}$ и $r_{14} + r_{15} + r_{16} = r_{18} + r_{19} + r_{21}$. Аналогично, $[121] = r_{19} = r^{\sim}_{19}$ влечет $r'_{19} = r^*_{19}$, поэтому $[112] = r_{16} = [211] = r_{14} + r_{15} + r_{16} - r_{18} - r_{21}$ и $r_{16} = r_{19}$. Отсюда $r_{16} = r'_{16} = r^*_{16} = r^{\sim}_{16}$ и $r_{19} = r'_{19} = r^*_{19} = r^{\sim}_{19}$.

Далее, $[122] = r_{17} = r'_{17}$ влечет $r^*_{17} = r^{\sim}_{17}$, поэтому $[212] = -r_{14} - r_{16} + 14 = [221]' = -r'_{14} - r'_{15} - r'_{16} + r'_{21} + 14$ и $r_{15} = r_{21}$. Теперь из равенства $r_{14} + r_{15} + r_{16} = r_{18} + r_{19} + r_{21}$ следует, что $r_{14} = r_{18}$. Аналогично, $[223] = r_{15} = r^*_{15}$ влечет $r'_{15} = r^{\sim}_{15}$, следовательно, $[232] = r_{21} = [322] = -r_{14} - r_{16} - r_{17} + r_{21} + 14$ и $r_{14} + r_{16} + r_{17} = 14$.

Отсюда следуют равенства

$[111] = -r_{16} - r_{20} + 1$, $[112] = [121] = r_{16}$, $[113] = [131] = r_{20}$, $[122] = r_{17}$, $[123] = [132] = r_{14}$, $[133] = 9 - r_{14} - r_{20}$;

$[211] = r_{16}$, $[212] = [221] = r_{17}$, $[213] = [231] = r_{14}$, $[222] = -r_{17} - r_{15} + 263$, $[223] = [232] = r_{15}$, $[233] = -r_{14} - r_{15} + 153$;

$[311] = r_{20}$, $[312] = [321] = r_{14}$, $[313] = [331] = -r_{14} - r_{20} + 9$, $[322] = r_{15}$, $[323] = [332] = -r_{14} - r_{15} + 153$, $[333] = 2r_{14} + r_{15} + r_{20} - 81$, где $r_{16} + r_{20} \le 1$, $r_{14} + r_{20} \le 9$, $r_{14} + r_{15} \le 153$, $r_{15} + r_{17} \le 167$.

Допустим, что $r_{16} = 1$. Тогда $r_{20} = 0$, $r_{14} + r_{17} = 13$ и выполняются равенства из пунктов (1)–(3) заключения леммы 4.

Допустим, что $r_{20} = 1$. Тогда $r_{16} = 0$, $r_{14} + r_{17} = 14$ и выполняются равенства из пунктов (4)–(6) заключения леммы 4.

Допустим, что $r_{20} = r_{16} = 0$. Тогда $r_{14} + r_{17} = 14$ и выполняются равенства из пунктов (7)–(9) заключения леммы 4. Лемма 4 доказана.

По лемме 4 имеем $96 \le [222] =\le 190$.

Пусть $d(u,v) = 2$. Подсчитаем число g пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, $p^2_{21} = 14$, по лемме 2 имеем $[212] = -r_5 + r_6 + r_7 - 135 \le 95$ ($r_5 \in \{0,1\}$, $r_6 \in \{0,1,\ldots,81\}$, $r_7 \in \{63,64,\ldots,149\}$) и $g \le 1330$. С другой стороны, $p^2_{22} = 264$, по лемме 4 имеем $[212] = 14 - r_{14}$ и $g = 3696 - \sum_i r^i_{14} \le 1330$. Поэтому $2366 \le \sum_i r^i_{14}$ и $10.1 \le \sum_i r^i_{14}/264$. Противоречие с тем, что $r_{14} \le 9$.

Полученное противоречие завершает доказательство следствия 1.

Пусть Γ – дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$. Тогда число вершин равно $(b^2-b+1)(b^2+1)$, Γ имеет спектр $(b^3-b^2)/2^1$, $(b^2-b)/2^{(b^2-b+1)b}$, $(-b \pm \sqrt{b^3-b^2+b})/2^{(b^2-b+2)(b-1)b/2}$, и дуальную матрицу Q собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & (b^2-b+1)b & \frac{1}{2}(b^2-b+2)(b-1)b & \frac{1}{2}(b^2-b+2)(b-1)b \\ 1 & b^2-b+1 & -\frac{(b^2-b+2)(b-\sqrt{b^3-b^2+b})}{2b} & -\frac{(b^2-b+2)(b+\sqrt{b^3-b^2+b})}{2b} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{b^3-b^2+b}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{b^3-b^2+b}-\frac{1}{2} \\ 1 & -b^2+b-1 & \frac{1}{2}(b+\sqrt{b^3-b^2+b})(b-1) & \frac{1}{2}(b-\sqrt{b^3-b^2+b})(b-1) \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Для чисел пересечений графа* Γ *верны равенства*

$$p^1_{11} = (b-3)b/2,\ p^1_{21} = (b^2-b+2)(b-1)/2,$$
$$p^1_{32} = (b^2-b+2)(b-1)/2,\ p^1_{22} = (b^2-b+2)(b-1)^2,$$
$$p^1_{33} = (b^2-b+2)/2;$$

$$p^2_{11} = (b-1)b/4,\ p^2_{12} = (b-1)^2 b/2,\ p^2_{13} = (b-1)b/4,$$
$$p^2_{22} = b^4-3b^3+5b^2-4b-1,\ p^2_{23} = (b^2-2b+3)b/2,$$
$$p^2_{33} = (b-1)b/4;$$

$$p^3_{12} = (b-1)^2 b/2,\ p^3_{13} = (b-1)b/2,$$
$$p^3_{22} = (b^2-2b+3)(b-1)b,\ p^3_{23} = (b-1)^2 b/2,$$
$$p^3_{33} = b-1.$$

Доказательство. Прямые вычисления.

Зафиксируем вершины u, v, w графа Γ и положим $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$.

Лемма 6. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 1$. *Тогда тройные числа пересечений равны*:

$[111] = b^4 - 7b^3/2 + 13b^2/2 - 6b - r_2 - r_3 - r_4$, $[121] = [211] = -b^4 + 7b^3/2 - 25b^2/4 + 23b/4 + r_2 + r_3 + r_4$, $[122] = b^4 - 7b^3/2 + 13b^2/2 - 7b - r_1 - r_2 - r_3 + 1$, $[123] = [132] = b^3/2 - 5b^2/4 + 7b/4 + r_1 - r_4 - 1$, $[133] = -b^3/2 + 3b^2/2 - 2b - r_1 + r_4 + 1$;

$[211] = -b^4 + 7b^3/2 - 6b^2 + 9b/2 + r_3 + r_4$, $[212] = [221] = b^4 - 3b^3 + 5b^2 - 4b - r_3 - r_4 - 1$, $[222] = r_3$, $[223] = [232] = r_4$, $[233] = b^3/2 - b^2 + 3b/2 - r_4$;

$[311] = r_2$, $[312] = [321] = b^2/4 - b/4 - r_2$, $[322] = b^3/2 - 3b^2/2 + 2b + r_1 + r_2$, $[323] = [332] = b^2/4 - b/4 - r_1$, $[333] = r_1$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 6 имеем $[233] = b^3/2 - b^2 + 3b/2 - r_4 \ge 0$, поэтому $[222] = r_4 \le b^3/2 - b^2 + 3b/2$.

Положим $\Delta = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p^2_{22} = b^4 - 3b^3 + 5b^2 - 4b - 1$ на $k_2 = (b^2-b+2)(b^2-b) = b^4 - 2b^3 + 3b^2 - 2b$ вершинах. Пусть $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 1$. Тогда

$\Lambda(v) \cap \Lambda(w)$ содержит не менее $b^4 - 4b^3 + 7b^2 - 6b - 1$ вершин. Поэтому $b^4 - 4b^3 + 7b^2 - 6b - 1 \le b^3/2 - b^2 + 3b/2$ и $b^4 + 8b^2 \le 9b^3/2 + 15b/2 + 1$. Отсюда $b \le 4$.

Но в случае $b = 3$ имеем $b^4 + 8b^2 = 153$, $9b^3/2 + 15b/2 + 1 = 121.5 + 22.5 + 1 = 145$, противоречие. Аналогично, в случае $b = 4$ имеем $b^4 + 8b^2 = 256 + 128 = 384$, $9b^3/2 + 15b/2 + 1 = 288 + 30 + 1 = 319$, противоречие.

Теорема 2 доказана.

Пусть Γ является графом Шилла с массивом пересечений $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$. Многочлен Тервелигера (см. [7]) графа Γ равен $-s(s^3 - s^2 - s - x - 1)(s^3 - sx - s - x - 1)(s + x + 1)(x + 1)$, поэтому собственные значения локального подграфа принадлежат $[-s - 1, -1] \cup [(s^3 - s - 1)/(s+1), s^3 - s^2 - s - 1]$. С другой стороны, по предложению 4.4.3 из [1] собственные значения локального подграфа принадлежат отрезку $[-s^4/(s^3 - 1) - 1, s^4/(s^2 + s + 1) - 1]$.

Положим $A = (s^3 - s - 1)/(s+1)$, $B = s^4/(s^2 + s + 1) - 1$. Тогда $B - A = (s^4(s+1) - (s^3 - s - 1)(s^2 + s + 1) - (s+1)(s^2 + s + 1))/((s+1)(s^2 + s + 1)) = -s^3/((s+1)(s^2 + s + 1)) < 0$, поэтому $B < A$ и все неглавные собственные значения локального подграфа отрицательны. Отсюда локальный подграф является объединением изолированных $(a_1 + 1)$-клик. Противоречие с тем, что $a_1 + 1 = s^3 - s - 1$ не делит $k = (s+1)(s^3 - 1)$.

Теорема 3 доказана.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. B., Heidelberg, N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 489 p.
2. *Koolen J.H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. V. 31. P. 2064–2073.
3. *Махнев А.А., Нирова М.С.* Дистанционно-регулярные графы Шилла // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 5. С. 730–744.
4. *Belousov I.N., Makhnev A.A.* To the theoty of Shilla graphs with $b_2 = c_2$ // Sib. Electron. Math. Reports. 2017. V. 14. P. 1135–1146.
5. *Белоусов И.Н.* Дистанционно-регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 3. С. 16–26.
6. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Series A. 2008. V. 115. P. 1086–1095.
7. *Gavrilyuk A., Koolen J.* A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2 // Combinatorica. 2019. V. 39. № 2. P. 289–321.

THREE INFINITE FAMILIES OF SHILLA GRAPHS DO NOT EXIST

Corresponding Member of the RAS A. A. Makhnev[a], I. N. Belousov[a], M. P. Golubyatnikov[a], and M. S. Nirova[b]

[a] *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

[b] *Berbekov Kabardino-Balkarskii State University, Nalchik, Russian Federation*

Distance-regular graph of diameter 3 with the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called Shilla graph. For the Shilla graph Γ the number $a = a_3$ devides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. Early three infinite families of Shilla graphs where founded: $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$ (I.N. Belousov), $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ (Koolen, Park) and $(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ (I.N. Belousov). In this paper it is proved that in the first series there exist the unique graph – generalized hexagon of order 2, in the second and in the third series there graphs no exist.

Keywords: distance-regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers