ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 51–54

МАТЕМАТИКА

УДК 517.545+517.962.2+519.173

О ТЕОРЕМЕ ПЛАНСА И ПЕРИОДИЧНОСТИ ЯКОБИАНОВ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

© 2021 г. А. Д. Медных[1,2], И. А. Медных[1,2,*]

Представлено академиком РАН Ю. Г. Решетняком 04.03.2021 г.
Поступило 10.03.2021 г.
После доработки 10.03.2021 г.
Принято к публикации 18.03.2021 г.

Теорема Планса утверждает, что первая группа гомологий n-листного циклического накрытия трехмерной сферы, разветвленного над заданным узлом, является прямой суммой двух экземпляров абелевой группы, если n – нечетно. Этот же результат верен для гомологий четно-листных накрытий, профакторизованных по группе гомологий 2-листного накрытия. Цель настоящего сообщения – установить аналогичные результаты для якобианов (критических групп) циркулянтных графов. Будет установлено также, что якобианы циркулянтных графов на n вершинах, приведенные по заданной конечной абелевой группе, являются периодическими функциями от n.

Ключевые слове: полином Александера, узел, разветвленное накрытие узла, циркулянтный граф, критическая группа, циклическое накрытие, группа гомологий

DOI: 10.31857/S2686954321030127

Пусть G – связный конечный граф на h вершинах. Обозначим через $\mathrm{D}(G)$ диагональную матрицу, составленную из валентностей вершин G, а через $\mathrm{A}(G)$ – матрицу смежности графа G. Матрица $\mathrm{L}(G) = \mathrm{D}(G) - \mathrm{A}(G)$ называется матрицей Лапласа графа G. Отметим, что $\mathrm{L}(G)$ представляет из себя симметрическую матрицу размером $h \times h$, все собственные значения которой, за исключеним одного нулевого, – положительны. Якобиан $Jac(G)$ графа G определим как группу кручения коядра $\mathbb{Z}$-линейного оператора $\mathrm{L}(G)\colon \mathbb{Z}^h \to \mathbb{Z}^h$. Конусом $\hat{G}$ над графом G назовем соединение $\{v\} \star G$ одноточечного графа $\{v\}$ с графом G, т.е. граф, в котором вершина v соединена единственным ребром с каждой из вершин графа G.

Известно, что $Jac(\hat{G})$ и коядро оператора $\mathrm{I} + \mathrm{L}(G)$ изоморфны ([1, замечание 3]), [2]. Отсюда, $Jac(\hat{G})$, как абелева группа, задается невырожденной матрицей $\mathrm{I} + \mathrm{L}(G)$. Определитель этой матрицы является важным инвариантом и совпадает с числом отмеченных остовных лесов в G.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k$ – целые неотрицательные числа. Циркулянтным графом $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на n вершинах $0, 1, 2, \ldots, n-1$ называется мультиграф, у которого вершина $i, 0 \le i \le n-1$, соединена ребром с каждой из вершин $i \pm s_1,\ i \pm s_2,\ \ldots,\ i \pm s_k \pmod n$. При этом все вершины графа имеют четную валентность $2k$.

В данной работе мы устанавливаем параллель между результатами, описывающими гомологии разветвленных циклических накрытий над узлами и теорией сложности циклических накрытий над графами.

Для удобства читателя приведем следующий глоссарий, позволяющий устанавливать соответствие между объектами из теории узлов и их аналогами в теории графов:

узел K в сфере $\mathbb{S}^3$ соответствует вершине v конуса $\hat{G} = \{v\} \star G$;

дополнение узла $\mathbb{S}^3 \backslash K$ соответствует графу G;

накрытие многообразия $\mathbb{S}^3 \backslash K$ соответствует накрытию графа G;

полином Александера узла K соответствует ассоциированному полиному Лорана графа G;

циклическое накрытие M_n сферы $\mathbb{S}^3$, разветвленное над K, соответствует циклическому накрытию $\hat{G}_n$ конуса $\hat{G} = \{v\} \star G$, разветвленному над v;

[1]*Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
**E-mail: ilyamednykh@mail.ru*

группа гомологий $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ соответствует якобиану $Jac(\hat{G}_n)$.

1. ТЕОРЕМА ПЛАНСА ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

Наиболее просто теорема Планса для графов формулируется в случае, когда G – граф с одной вершиной и k петлями. В этом случае G_n – циркулярный граф вида $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, а $\hat{G}_n$ – конус над ним.

Теорема 1. *Пусть $G_n = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ – циркулярный граф на n вершинах, а $\hat{G}_n$ – конус над ним. Тогда для любого нечетного n группа $Jac(\hat{G}_n)$ является прямой суммой двух экземпляров конечной абелевой группы. Если n – четно, то группа $Jac(\hat{G}_2)$ естественным образом вкладывается в группу $Jac(\hat{G}_n)$, а фактор группа $Jac(\hat{G}_n)/Jac(\hat{G}_2)$ представляется в виде прямой суммы двух экземпляров конечной абелевой группы.*

Доказательство основано на следующих соображениях. Рассмотрим ассоциированный с графом G_n полином Лорана $L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j})$. Воспользуемся тем, что абелева группа $Jac(\hat{G}_n)$ представима невырожденной матрицей $\mathrm{I} + \mathrm{L}(G_n)$. Напомним [3], что лапласиан циркулянтного графа G_n имеет вид $\mathrm{L}(G_n) = L(\mathrm{T}_n)$, где T_n – циркулярная $n \times n$ матрица вида $\mathrm{T}_n = circ(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Отсюда $\mathrm{I} + \mathrm{L}(G_n) = A(\mathrm{T}_n)$, где $A(z) = 1 + L(z)$. Отметим, что $A(z)$ – полином Лорана с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющий условиям $A(z) = A\left(\frac{1}{z}\right)$ и $A(1) = 1$. Следовательно [4], $A(z)$ является полиномом Александера некоторого узла K. Пусть M_n – семейство циклических накрытий сферы $\mathbb{S}^3$, разветвленных над узлом K. Согласно [4], группа гомологий $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ вычисляется как $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\langle A(t), t^n - 1\rangle$, где $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ – кольцо лорановских полиномов от t с целочисленными коэффициентами. Поэтому (см., например [5, лемма 3.2]), $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ как абелева группа задается матрицей $A(\mathrm{T}_n)$. Отсюда группы $Jac(\hat{G}_n)$ и $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ изоморфны. Следовательно, утверждения теоремы 1 о разложении якобиана в прямую сумму двух экземпляров абелевой группы следуют из теоремы Планса [6], современное доказательство которой можно найти в [7] и [8].

Заметим, что $\det(A(\mathrm{T}_n))$ совпадает с числом отмеченных остовных лесов в графе G_n и, следовательно, всегда отличен от нуля. Это означает, что $Jac(\hat{G}_n)$ – конечная абелева группа, как и прямые сомножители, на которые она раскладывается.

Важно отметить, что в случае произвольного узла K группа $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ не обязательно конечна [7].

Теорема 1 и ее доказательство без существенных изменений могут быть перенесены на обобщенные графы Петерсена, I-графы, сэндвичи циркулянтных графов и другие классы полициркулянтных графов.

2. ТЕОРЕМЫ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ ГОМОЛОГИЙ И ЯКОБИАНОВ

В текущем разделе приводятся известные результаты о периодичности групп гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_m$ или, более обще, в произвольной конечной абелевой группе $\mathbb{A}$, и устанавливаются их аналоги для якобианов графов.

Известно, что группы гомологий n-листных разветвленных накрытий над узлом, вычисленные с коэффициентами в заданной циклической группе $\mathbb{Z}_m$, образуют периодическую последовательность. Следуя [8], представим это утверждение в более общей форме. Пусть M_n – последовательность n-листных циклических накрытий, разветвленных над заданным узлом, и $\mathbb{A}$ – конечная абелева группа. Тогда последовательность групп гомологий $H_1(M_n, \mathbb{A})$ с коэффициентами в группе $\mathbb{A}$ – периодична. Аналогичная теорема имеет место и для неразветвленных накрытий дополнения узла до гомологической сферы [9]. Напомним, что по универсальной теореме о коэффициентах $H_1(M_n, \mathbb{A}) = H_1(M_n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{A}$.

Для формулировки аналогичного утверждения для графов назовем приведенным якобианом $Jac_{\mathbb{A}}(G)$ графа G по абелевой группе $\mathbb{A}$ группу, заданную тензорным произведением $Jac(G) \otimes \mathbb{A}$.

Представим конечную абелеву группу $\mathbb{A}$ в виде примарного произведения $\mathbb{Z}_{q_1} \oplus \mathbb{Z}_{q_2} \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_k}$, где $q_1, q_2, \ldots, q_k$ – подходящие степени простых чисел, и положим $Jac_q(G) = Jac(G) \otimes \mathbb{Z}_q$. Тогда приведенный якобиан $Jac_{\mathbb{A}}(G)$ графа G по группе $\mathbb{A}$ равен $Jac_{q_1}(G) \oplus Jac_{q_2}(G) \oplus \ldots \oplus Jac_{q_k}(G)$.

Отметим, что приведенные якобианы играют важную роль в дискретной теории динамических систем [10].

Имеет место следующая теорема. Приведенное ниже доказательство достаточно элементарно и не опирается на теорию гомологий. Однако использованные в нем идеи, несомненно, могут быть применены и для доказательства периодичности групп гомологий.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $G_n = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $n = 1, 2, \ldots$, *— последовательность циркулянтных графов, а* $\hat{G}_n$ *— соответствующая ей последовательность конусов. Предположим, что* $1 \le s_1 \le \ldots \le s_{k-1} < s_k$.

Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная конечная абелева группа. Тогда последовательности приведенных по группе $\mathbb{A}$ якобианов $Jac_{\mathbb{A}}(G_n)$ и $Jac_{\mathbb{A}}(\hat{G}_n)$ — периодичны.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 проводится по следующей схеме. Поскольку группа $\mathbb{A}$ разлагается в конечную прямую сумму примарных циклических групп, первое утверждение теоремы достаточно доказать для случая $\mathbb{A} = Jac_q(G_n)$, где $q = p^k$ — положительная степень простого числа p. Рассмотрим полином Лорана $L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j})$, ассоциированный с графом G_n. Пусть $\mathcal{A}$ — его сопровождающая матрица вида $\left(\frac{0 \mid I_{2s_k-1}}{\ell}\right)$, где строка ℓ имеет вид $(\varepsilon_{s_k}, \varepsilon_{s_k-1}, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s_k-1})$, где ε_i равен коэффициенту полинома $L(z)$ при z^i.

Тогда по теореме 2.1 из [3] якобиан графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ изоморфен группе кручения коядра оператора $\mathcal{A}^n - I_s\colon \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}^s$, где $s = 2s_k$. Указанное коядро — это абелева группа, представимая матрицей $\mathcal{A}^n - I_s = \{a_{i,j}(n)\}_{i,j=1,\ldots,s}$. Отметим, что обе матрицы $\mathcal{A}$ и I_s удовлетворяют уравнению $P(z) = 0$, где

$$P(z) = L(z)(1 - z) = z^{-s_k}(z^{s+1} + p_1 z^s + \ldots + p_s z + 1)$$

есть полином Лорана с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице. Отсюда непосредственно следует, что матрица $\mathcal{A}^n - I_s$ и каждый из ее коэффициентов $a_{i,j}(n)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$\begin{gathered} u(n + s + 1) + p_1 u(n + s) + \ldots + \\ + p_s u(n + 1) + u(n) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Таким образом, при фиксированных i и j коэффициенты $a_{i,j}(n)$ образуют линейную рекуррентную последовательность. Хорошо известно [11], что линейная рекуррентная последовательность, взятая по любому модулю m, — периодична. При этом [12] ее период эффективно выражается через число m и коэффициенты полинома $P(z)$. Воспользуемся равенством $\operatorname{coker}(\mathcal{A}^n - I_s) = Jac(G_n) \oplus \mathbb{Z}$ и заметим, что абелева группа $\operatorname{coker}(\mathcal{A}^n - I_s) \oplus \mathbb{Z}_q = Jac_q(G_n) \oplus \mathbb{Z}_q$ задается матрицей $\{(a_{i,j}(n), q)\}_{i,j=1,\ldots,s}$, где $(a_{i,j}(n), q)$ — наибольший общий делитель $a_{i,j}(n)$ и q. Тогда ее периодичность, равно как и периодичность группы $Jac_q(G_n)$, обеспечиваются следующей леммой.

Л е м м а 1. *Пусть q — целое положительное число, а $u(n)$ — линейная рекурсивная последовательность, удовлетворяющая уравнению* (1). *Тогда последовательность* $(u(n), q)$ *периодична по* n.

Для доказательства леммы воспользуемся периодичностью последовательности $u(n)$ по модулю q. Тогда найдется период m такой, что для всех натуральных n имеет место сравнение $u(n + m) \equiv u(n) \bmod q$. Отсюда для некоторых целых $d(n)$ справедливы равенства $u(n + m) = u(n) + d(n)q$. Следовательно, $(u(n + m), q) = (u(n) + d(n)q, q) = (u(n), q)$, т.е. последовательность $(u(n), q)$ периодична с периодом m.

Второе утверждение теоремы доказывается по той же схеме с заменой лорановского полинома $L(z)$ на $1 + L(z)$.

Теорема 2 и идея ее доказательства могут быть перенесены на широкий класс полициркулянтных графов, включающих в себя обобщенные графы Петерсена, I-, Y-, H-графы и, более обще, на дискретные расслоения Зейферта, рассмотренные в работе [13].

3. ПРИМЕРЫ

1. Ц и к л и ч е с к и й г р а ф $G_n = C_n$. В этом случае якобиан конуса $\hat{G}_n$ имеет вид $Jac(\hat{G}_n) = \mathbb{Z}_{L_m} \oplus \mathbb{Z}_{L_m}$, если $n = 2m + 1$ нечетно, и $Jac(\hat{G}_n) = \mathbb{Z}_{F_m} \oplus \mathbb{Z}_{5F_m}$, если $n = 2m$ четно. Здесь L_m и F_m — это числа Люка и Фибоначчи соответственно. Заметим, что сопровождающий полином графа $\hat{G}_n$ равен $-z^{-1} + 3 - z$ и совпадает с полиномом Александера узла “восьмерка”. Хорошо известно [14, 15], что группа гомологий n-листного циклического накрытия трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$, разветвленного над узлом “восьмерка”, совпадает с указанной выше абелевой группой.

2. Г р а ф $G_n = C_n(1, 2)$. Напомним, что [3] якобианы данного семейства графов заданы формулой $Jac(C_n(1, 2)) = \mathbb{Z}_{\text{НОД}(n, F_n)} \oplus \mathbb{Z}_{F_n} \oplus \mathbb{Z}_{\text{НОК}(n, F_n)}$, где F_n — это числа Фибоначчи. Для нахождения якобиана конуса $Jac(\hat{G}_n)$ введем в рассмотрение две последовательности $s(n)$ и $t(n)$, удовлетворяющие единому рекуррентному соотношению

Таблица 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$s(n)$	0	2	2	17	12	162	103	1395
$t(n)$	0	0	0	3	2	30	19	259

$$u(n) - 17u(n+2) + 34u(n+4) - \\ - 12u(n+6) + u(n+8) = 0$$

и начальным данным, приведенным в табл. 1.

Тогда теорема 1 позволяет установить, что группа $Jac(\hat{G}_n)$ в случае нечетного n и фактор-группа $Jac(\hat{G}_n)/Jac(\hat{G}_2)$ в случае четного n разлагаются в прямую сумму абелевых групп $H_n \oplus H_n$, где $H_n \cong \mathbb{Z}_{\alpha(n)} \oplus \mathbb{Z}_{\beta(n)}$, $\alpha(n) = \text{НОД}\left(t(n), \frac{s(n)+t(n)}{2}\right)$, $\beta(n) = \frac{s(n)^2 - 29t(n)^2}{4\alpha(n)}$ и $Jac(\hat{G}_2) \cong \mathbb{Z}_5$.

В качестве иллюстрации теоремы 2 заметим, что периоды последовательностей приведенных якобианов $Jac(G_n) \otimes \mathbb{Z}_6$ и $Jac(\hat{G}_n) \otimes \mathbb{Z}_6$ равны 12 и 5, а периоды последовательностей $Jac(G_n) \otimes \mathbb{Z}_7$ и $Jac(\hat{G}_n) \otimes \mathbb{Z}_7$ равны 56 и 12.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goel G., Perkinson D.* // Linear Algebra Appl. 2019. V. 567. P. 138–142.
2. *Grunwald L.A., Mednykh I.A.* // On complexity and Jacobian of cone over a graph. Preprint. 2020. arXiv:2004.07452 [math.CO].
3. *Медных А.Д., Медных И.А.* // ДАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 539–543.
4. *Kawauchi A.* // A survey of knot theory. Basel: Birkhauser Verlag, 1996.
5. *Kwon Y.S., Mednykh A.D., Mednykh I.A.* // Linear Algebra Appl. 2017. V. 529. P. 355–373.
6. *Plans A.* // Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Natur. Madrid. 1953. V. 47. P. 161–193.
7. *Gordon C.McA.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 85–87.
8. *Stevens W.H.* // On the Homology of Branched Cyclic Covers of Knots. Louisiana State University. PhD thesis. (1996). https: //digitalcommons:lsu:edu/gradschool_disstheses/6282
9. *Sakuma M.* // Can. J. Math. 1995. V. 47. No 1. P. 201–224.
10. *Neumärker N.* // The Arithmetic Structure of Discrete Dynamical Systems on the Torus. PhD thesis. Univ. Bielefeld, 2012.
11. *Carmichael R.D.* // Quart. J. Pure Appl. Math. 1920. V. 48. P. 343–372.
12. *Ward M.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35. P. 600–628.
13. *Квон Й.С., Медных А.Д., Медных И.А.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 411–415.
14. *Fox R.H.* // Ann. Math. 1960. V. 71. № 1. P. 187–196.
15. *Helling H., Kim A.C., Mennicke J.L.* // J. Lie Theory. 1998. V. 8. № 1. P. 1–23.

PLANS' PERIODICITY THEOREM FOR JACOBIAN OF CIRCULANT GRAPHS

A. D. Mednykh[a,b] and I. A. Mednykh[a,b]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberean Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak

Plans theorem states that for n odd the first homology group of the n-fold cyclic covering of the three-dimensional sphere branched over a knot is the direct product of two copies of an Abelian group. A similar statement holds for even n. In this case, one has to factorize the homology group of n-fold covering by the homology group of two-fold covering of the knot. The aim of this note is to establish the similar results for Jacobians (critical group) of a circulant graph. Moreover, it is shown that the Jacobian group of a circulant graph on n vertices reduced module a given finite Abelian group is a periodic function of n.

Keywords: Alexander polynomial, knot, knot branched covering, circulant graph, critical group, sandpile group, cyclic covering, homology group