

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, В. И. Голубев^{1,2,**},
В. Ю. Петрухин¹, И. С. Никитин²

Поступило 26.02.2021 г.

После доработки 26.02.2021 г.

Принято к публикации 24.03.2021 г.

Рассматривается задача о распространении сейсмических волн в гетерогенном геологическом массиве. Для описания динамического поведения среды используются уравнения линейной теории упругости. Учет слоистой структуры массива производится на основе поперечно-изотропной модели геологического разреза. Для численного решения определяющей системы уравнений используется сеточно-характеристический метод на параллелепипедных сетках. Авторами реализован подход, позволяющий в явном виде решить контактную задачу между изотропной и анизотропной средами. Представлен алгоритм, позволяющий провести полномасштабное моделирование всех типов поверхностных и объемных волн. Его работоспособность подтверждена на примере анизотропной модели Marmousi II.

Ключевые слова: математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, сейсморазведка, анизотропная среда, сейсмические волны

DOI: 10.31857/S2686954321030140

Первые сейсмические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых появились более 100 лет назад. За эти годы сейсмическая разведка стала одним из ведущих геофизических методов. Основанная изначально на простейшем лучевом представлении о распространении сейсмических волн, сегодня она использует все более сложные и реалистичные модели динамического поведения геологических сред [1–4]. При этом повышение точности восстановления внутренней структуры среды наиболее важно для залежей нетрадиционных углеводородов. Полученные оценки используются для оптимизации схемы разработки месторождений. Ввиду невозможности проведения натуральных полномасштабных экспериментальных исследований геологических структур с заданной геометрией на практике активно применяются математическое моделирование и численный эксперимент.

Хорошие обзоры современных методов вычислительной физики, применяемых для решения задач о распространении сейсмических волн, представлены в работах [5–7]. При этом, ввиду гиперболичности волновой задачи, естественным является применение класса сеточно-характеристических методов [8], учитывающих распространение разрывов решения вдоль характеристик. Они доказали свою эффективность при решении задач акустики [9] и упругости [10], а также динамики трещиноватых [11] и нелинейных слоистых сред [12].

В настоящей работе рассматривается задача динамической нагрузки гетерогенного геологического массива. Целью исследования является построение вычислительного алгоритма, позволяющего учитывать тонкослоистую структуру отдельных криволинейных геологических слоев. В работе используется модель поперечно-изотропной линейно-упругой среды в двумерной постановке. Для нахождения численного решения на первом шаге используется расщепление по пространственным направлениям. В дальнейшем отдельные одномерные линейные уравнения переносятся на сеточно-характеристическим методом повышенного порядка точности. Для верификации построенного алгоритма используются результаты расчетов в однородных средах, представленные в работе [13]. В работе описан алго-

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

² Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: w.golubev@mail.ru

ритм, позволяющий построить точное решение на контакте изотропная–анизотропная среды, основанный на аналитическом решении задачи Римана о распаде разрыва [14]. Проведено сопоставление полученных полей смещений. Разработанный расчетный алгоритм успешно применен для решения задачи о точечном источнике в сложно построенной горизонтально-изотропной модели, основанной на изотропной упругой модели Marmousi II [15].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнения, описывающие динамическое поведение бесконечно малого объема изотропной линейно-упругой среды, могут быть записаны в виде

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla), \quad (2)$$

где ρ – плотность среды, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{v} – вектор скорости среды, λ и μ – упругие параметры Ламе.

Ввиду особенностей формирования (осадконакопление и эрозия) реальные геологические среды являются поперечно-изотропными (VTI). Для них связь между тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ выражается следующим реологическим соотношением (в двумерной постановке):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где C_{ij} – упругие параметры среды, а ось OY направлена вертикально.

Система уравнений в частных производных первого порядка (1)–(3) может быть приведена к каноническому виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + A_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} + A_y \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

где $\mathbf{q} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$ – вектор неизвестных функций, \mathbf{f} – источник сейсмического сигнала, а матрицы A_x и A_y имеют вид

$$A_x = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$A_y = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Обе представленные матрицы могут быть записаны в виде $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$, где матрица Ω состоит из собственных векторов, а Λ – из соответствующих им собственных значений. Отличные от нуля собственные значения равны $\pm \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \pm \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \pm \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$, что обуславливает зависимость скорости распространения сейсмических волн от направления.

Обе приведенные выше системы уравнений являются гиперболическими, и после проведения расщепления по направлениям каждая из них может быть решена сеточно-характеристическим методом с переходом в инварианты Римана и обратно. При этом устойчивость полученного вычислительного алгоритма определяется критерием Куранта–Фридрихса–Леви. Порядок аппроксимации схемы совпадает с порядком восстанавливаемого интерполяционного полинома в одномерном случае и снижается до второго в двумерном случае из-за расщепления по направлениям.

Рассмотрим подробнее случай контакта между изотропной и горизонтально-изотропной (анизотропной) средами, который может реализовываться, например, при детальном описании строения верхней части разреза и более грубом описании объема нефтяной залежи. На границе между средами должно быть задано необходимое число контактных условий – по количеству выходящих из сред на границу характеристик. Таким образом, в рассматриваемом нами случае достаточно четырех условий. Они формулируются в следующем виде:

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{v}^a, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^a \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

где \mathbf{v}^i – вектор скорости изотропной среды, \mathbf{v}^a – вектор скорости анизотропной среды, $\boldsymbol{\sigma}^i$ – тензор напряжений изотропной среды, $\boldsymbol{\sigma}^a$ – тензор напряжений анизотропной среды, \mathbf{n} – нормаль, направленная из изотропной среды в анизотропную среду.

В настоящей работе был развит подход, предложенный в работе [10] для изотропной упругой среды. Корректировочные формулы, обеспечивающие точное равенство скорости точек на границе расчетной области заданному вектору \mathbf{V}^{ext} , имеют вид

$$\sigma_{xx}^- = \pm \sqrt{\rho C_{11}} (v_x - V_x^{ext}), \quad (9)$$

$$\sigma_{yy}^- = \pm C_{13} \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}} (v_x - V_x^{ext}), \quad (10)$$

$$\sigma_{xy}^- = \pm \sqrt{\rho C_{44}} (v_y - V_y^{ext}), \quad (11)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}^{ext}, \quad (12)$$

если нормаль к границе совпадает с горизонтальной осью, и

$$\sigma_{xx}^- = \pm C_{13} \sqrt{\frac{\rho}{C_{33}}} (v_y - V_y^{ext}), \quad (13)$$

$$\sigma_{yy}^- = \pm \sqrt{\rho C_{33}} (v_y - V_y^{ext}), \quad (14)$$

$$\sigma_{xy}^- = \pm \sqrt{\rho C_{44}} (v_x - V_x^{ext}), \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}^{ext}, \quad (16)$$

если нормаль к границе совпадает с вертикальной осью. Здесь знак плюс соответствует положительно направленной нормали, а знак минус – отрицательно направленной нормали. Тогда из условий (7)–(8) может быть найден такой вектор \mathbf{V}^{ext} , использование которого в граничном корректуре обеспечит точное выполнение физических условий на контакте двух разнородных сред. Если внешняя нормаль к анизотропной среде направлена вдоль оси OX :

$$V_x^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{xx}^i - \sigma_{xx}^a) + \sqrt{\rho^a C_{11}} v_x^a + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)} v_x^i}{\sqrt{\rho^a C_{11}} + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)}}, \quad (17)$$

$$V_y^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{xy}^i - \sigma_{xy}^a) + \sqrt{\rho^a C_{44}} v_y^a + \sqrt{\rho^i \mu} v_y^i}{\sqrt{\rho^a C_{44}} + \sqrt{\rho^i \mu}}, \quad (18)$$

и вдоль оси OY :

$$V_x^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{xy}^i - \sigma_{xy}^a) + \sqrt{\rho^a C_{44}} v_x^a + \sqrt{\rho^i \mu} v_x^i}{\sqrt{\rho^a C_{44}} + \sqrt{\rho^i \mu}}, \quad (19)$$

$$V_y^{ext} = \frac{\pm(\sigma_{yy}^i - \sigma_{yy}^a) + \sqrt{\rho^a C_{33}} v_y^a + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)} v_y^i}{\sqrt{\rho^a C_{33}} + \sqrt{\rho^i (\lambda + 2\mu)}}, \quad (20)$$

где знак плюс соответствует положительно направленной нормали, а знак минус – отрицательно направленной нормали.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В работе было выполнено тестирование разработанного алгоритма на задаче о точечном источнике, расположенном в двух материалах, значительно отличающихся параметрами анизотропии. В обоих случаях расчетная область представляла собой квадрат размерами 33×33 см. Была построена расчетная сетка с шагом 2×2 мм. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости и составлял 0.1 мкс. При решении отдельных урав-

нений переноса на инварианты Римана использовалась схема Русанова с монотонизатором \min третьего порядка точности. В качестве источника возмущения использовался точечный источник вертикально направленной силы, приложенный в центре расчетной области и имеющий временную зависимость вида

$$f(t) = e^{-0.5f_0^2(t-t_0)^2} \cos \pi f_0(t-t_0), \quad (21)$$

с параметрами $f_0 = 5 \times 10^5$ Гц, $t_0 = 6$ мкс. В первом расчете использовался апатит с параметрами $C_{11} = 16.7 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{13} = 6.6 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{33} = 14.0 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{44} = 6.63 \times 10^{10}$ Н/м, $\rho = 3200$ кг/м³. Им соответствуют следующие скорости распространения волн: 7224, 4551 и 6614 м/с. Во втором расчете использовался кобальт с параметрами $C_{11} = 30.7 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{13} = 10.3 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{33} = 35.8 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{44} = 7.55 \times 10^{10}$ Н/м, $\rho = 8900$ кг/м³. Им соответствуют следующие скорости распространения волн: 5873, 2912 и 6342 м/с. На границах области моделирования использовались неотражающие граничные условия. В расчетах записывались обе компоненты скорости смещения среды во всех узлах расчетной сетки. В дальнейшем, на основе полученных данных, вычислялось поле горизонтальных смещений путем интегрирования сигнала по времени. Для обоих расчетов результаты представлены на рис. 1. Они полностью совпали с результатами, представленными в работе [9], в которой использовался псевдоспектральный метод.

Представленный в работе метод позволяет в явном виде находить решение динамической задачи о контакте изотропной и анизотропной сред. Была рассмотрена следующая постановка задачи. Левая половина расчетной области заполнена цинком с параметрами $C_{11} = 16.5 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{13} = 5.0 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{33} = 6.2 \times 10^{10}$ Н/м, $C_{44} = 3.96 \times 10^{10}$ Н/м, $\rho = 7100$ кг/м³. Им соответствуют следующие скорости распространения волн: 4820, 2361 и 2955 м/с. Правая половина расчетной области заполнена изотропным материалом, обладающим такой же плотностью, скоростью распространения продольных волн 4820 м/с и скоростью распространения поперечных волн 2361 м/с. Вблизи контактной границы в анизотропном материале задавался точечный источник вертикальной силы с временной зависимостью (21). Вся расчетная область имела размеры 32×32 см, пространственный шаг сетки составлял 0.8 мм, временной шаг был равен 0.1 мкс. На рис. 2 представлена волновая картина, построенная по вертикальной компоненте вектора смещений. Четко

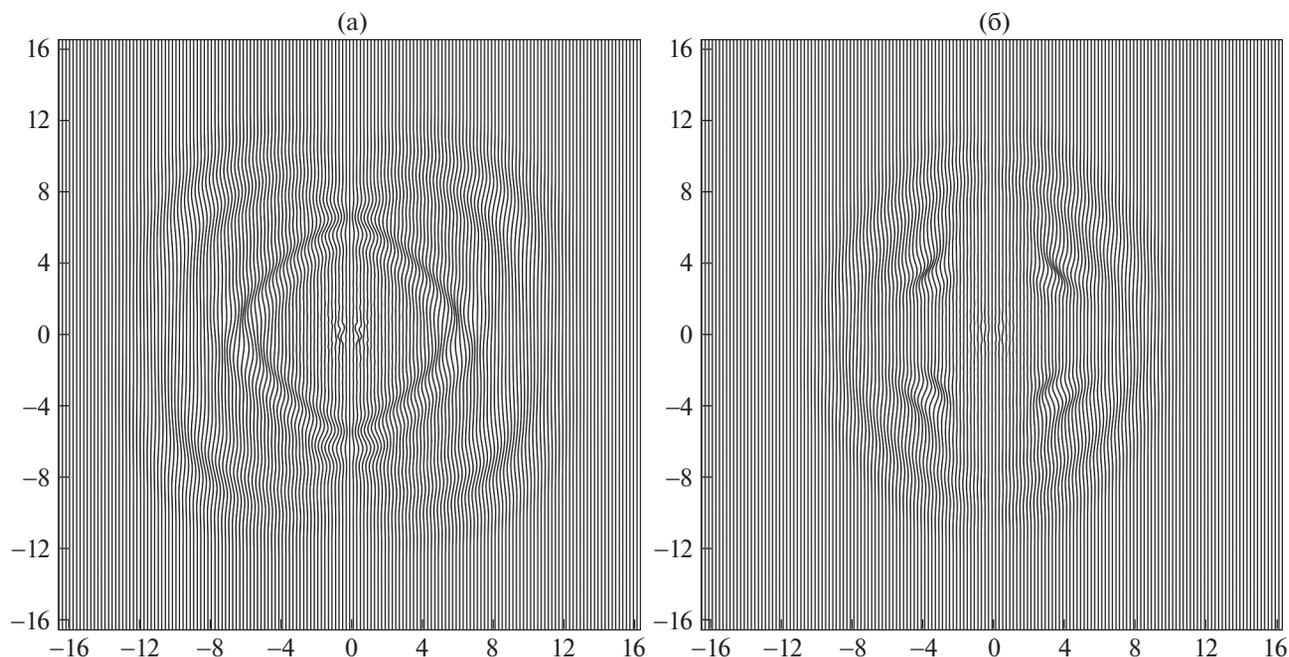


Рис. 1. Поле смещений u_x , рассчитанное в апатите через 20 мкс после начала воздействия (а). Поле смещений u_x , рассчитанное в кобальтите через 24 мкс после начала воздействия (б).

видны изотропия расходящейся волны справа и вытянутая пространственная форма сигнала слева.

В работе был проведен численный расчет распространения сейсмических волн в реалистичной модели сложно построенного геологического массива. За основу была взята свободно распро-

страняемая упругая модель Marmousi II. В нее была внесена VTI анизотропия с использованием следующих соотношений:

$$\varepsilon = 0.25\rho - 0.3, \quad (22)$$

$$\delta = 0.125\rho - 0.1, \quad (23)$$

$$C_{11} = \rho(1 + 2\varepsilon)V_P^2, \quad (24)$$

$$C_{33} = \rho V_P^2, \quad (25)$$

$$C_{44} = \rho V_S^2, \quad (26)$$

$$C_{13} = \rho V_P^2 \sqrt{\left(1 - \frac{V_S^2}{V_P^2}\right) \left(1 - \frac{V_S^2}{V_P^2} + 2\delta\right)} - \rho V_S^2, \quad (27)$$

где плотность рассчитывается в г/см^3 , а ε и δ — параметры Томсена.

Для покрытия модели расчетной сеткой был выбран шаг по пространству 5 м и 3401×701 узлов. Шаг по времени определялся условием Куранта и составлял 0.8 мс. В каждой ячейке расчетной сетки хранились все параметры анизотропного материала. В качестве возмущения использовался точечный источник (центр давления), расположенный вблизи дневной поверхности. На рис. 3 представлено распределение модуля скорости в фиксированный момент времени. Слоистость геологической модели, наличие резких границ и анизотропия обуславливают сложную волновую картину.

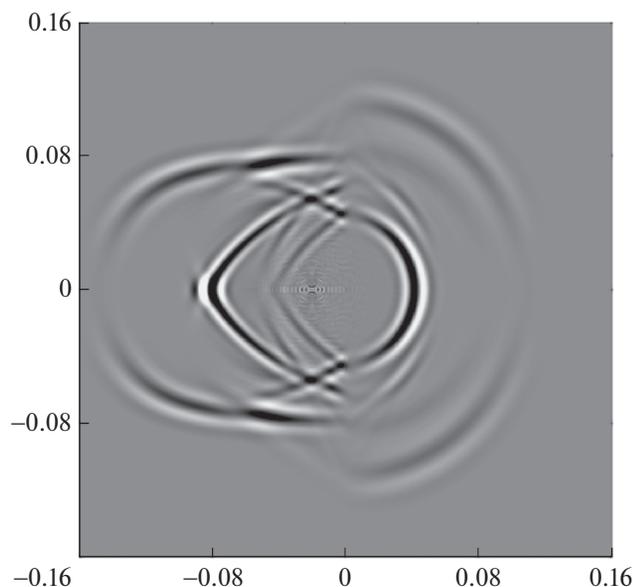


Рис. 2. Поле смещений u_y , рассчитанное при контакте цинка (левая половина) и изотропной среды (правая половина) через 32 мкс после начала воздействия.

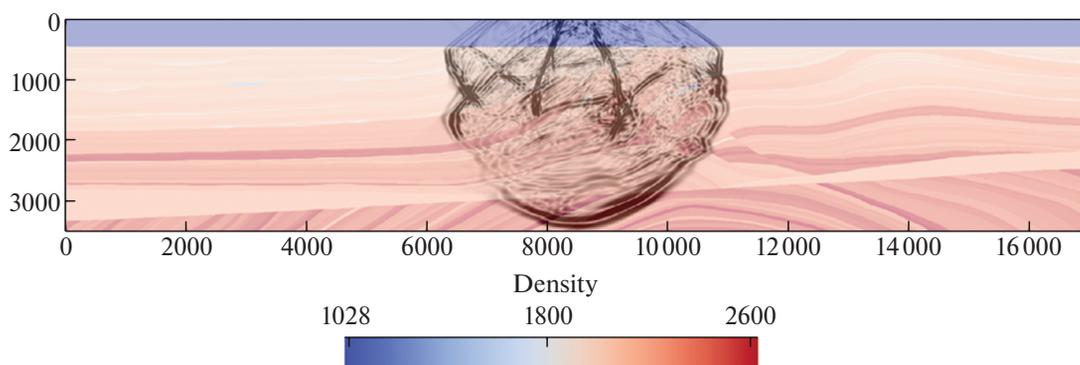


Рис. 3. Распределение модуля скорости в анизотропной модели Marmousi II в фиксированный момент времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен подход, позволяющий проводить учет ВТИ анизотропии при математическом моделировании процесса распространения сейсмических волн в геологическом массиве. Построена явная разностная схема, основанная на расщеплении по пространственным направлениям и сеточно-характеристическом методе. Предложен способ, позволяющий обеспечить выполнение контактных условий на границе изотропной и анизотропной сред. Корректность вычислительного алгоритма была подтверждена сопоставлением полученного решения для однородной и неоднородной сред. Был проведен расчет процесса распространения сейсмических волн в ВТИ модели Marmousi II. Неоднородность геологического строения среды обуславливает сложную волновую картину объемных волн. Дальнейшее развитие идей, изложенных в работе, может быть направлено на их обобщение на трехмерный случай и учет трещиноватости анизотропной среды.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-10060).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carcione J.M., Morency C., Santos J.E.* Computational poroelasticity – A review // *Geophysics*. 2010. V. 75. A229-A243.
2. *Ba J., Carcione J.M., Cao H., Yao F., Du Q.* Poro-acoustoelasticity of fluid-saturated rocks // *Geophys. Prosp.* 2012. V. 61. P. 599–612.
3. *Gauzellino P., Carcione J.M., Santos J.E., Picotti S.* A rheological equation for anisotropic-anelastic media and simulation of synthetic seismograms // *Wave Motion*. 2014. V. 51. P. 743–757.
4. *Carcione J.M., Wang Z., Ling W., Salusti E., Ba J., Fu L.-Y.* Wave simulation in linear thermoelastic media // *Geophysics*. 2019. V. 84 (1). T1–T11.
5. *Virieux J., Calandra H., Plessix R.E.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging // *Geophysical Prospecting*. 2011. V. 59 (5). P. 794–813.
6. *Carcione J.M., Herman C.G., Kroode P.E.* Y2K Review Article: Seismic Modeling // *Rev. Lit. Arts Amer.* 2002. V. 67 (4). P. 1304–1325.
7. *Jing Ba et al.* Seismic Exploration of Hydrocarbons in Heterogeneous Reservoirs: New Theories, Methods and Applications. Elsevier, 2015. 362 p.
8. *Холодов А.С.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // *ЖВМиМФ*. 1980. Т. 20. № 6. С. 1601–1620.
9. *Петров И.Б., Голубев В.И., Шевченко А.В.* О задаче акустической диагностики прискважинной зоны // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2020. Т. 492. № 1. С. 92–96.
10. *Favorskaya A., Golubev V.* Study the elastic waves propagation in multistory buildings, taking into account dynamic destruction // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2020. V. 193. P. 189–199.
11. *Golubev V., Nikitin I., Ekimenko A.* Simulation of seismic responses from fractured MARMOUSI2 model // *AIP Conference Proceeding*. 2020. 2312, № 050006.
12. *Golubev V., Nikitin I., Golubeva Yu., Petrov I.* Numerical simulation of the dynamic loading process of initially damaged media // *AIP Conf. Proc.* 2020. 2309, 020006 <https://doi.org/10.1063/5.0033949>
13. *Carcione J.M., Kosloff D., Kosloff R.* Wave propagation simulation in an anisotropic (transversely isotropic) medium // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* 1988. V. 41. P. 320–345.
14. *Golubev V., Shevchenko A., Petrov I.* Simulation of Seismic Wave Propagation in a Multicomponent Oil Deposit Model // *Intern. J. Appl. Mech.* 2020. V. 12 (8). № 2050084.
15. *Qingyang Li, Guochen Wu, Jianlu Wu, Peiran Duan.* Finite difference seismic forward modeling method for fluid–solid coupled media with irregular seabed interface // *J. Geophysics and Engineering*. 2019. V. 16. № 1. P. 198–214.

SEISMIC WAVES SIMULATION IN ANISOTROPIC MEDIA

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^{a,b}**, **V. I. Golubev^{a,b}**,
V. Yu. Petrukhin^a, and **I. S. Nikitin^b**

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^b *Institute of Computer Aided Design of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

The problem of the seismic waves propagation in heterogeneous geological media is considered. For describing its dynamic behavior, the linear elastic system of equations is applied. The medium stratification is taken into account with the usage of the vertical transverse isotropic (VTI) model. The numerical solution is obtained by the grid-characteristic method on parallelepiped meshes. The authors developed a new approach for the explicit solution of the contact isotropic–anisotropic problem. The computational algorithm for the full-wave simulation of volumetric and surface waves was presented. It was successfully applied to the two-dimensional anisotropic Marmousi II model.

Keywords: mathematical modeling, grid-characteristic method, seismic survey process, anisotropic medium, seismic waves