

## КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2021 г. Н. В. Зайцева<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 24.02.2021 г.

Поступило 26.02.2021 г.

После доработки 26.02.2021 г.

Принято к публикации 16.03.2021 г.

Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с нелокальным потенциалом построено трехпараметрическое семейство глобальных решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение

**DOI:** 10.31857/S2686954321030152

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено И. Бернулли [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Рассмотренное им уравнение встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других математиков (см., например, [2] и имеющуюся там библиографию). В книге [3] приведен обширный материал по теории линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами, часто встречающимися в теории автоматического регулирования.

Изучение задач механики сплошных сред привело в дальнейшем к рассмотрению дифференциально-разностных уравнений с частными производными. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для указанных уравнений в ограниченных областях (см., например, [4, 5] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях подробно изучены задачи для параболических [6] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [7–11]. В частности, в работах [10, 11] рассматриваются сильно эллиптические уравнения с нелокальными потенциалами по одной из пространственных переменных, встречающиеся в моделях нелинейной оптики. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по пе-

ременной времени [12]. В работах [13–15] рассмотрены гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной.

В настоящей работе рассмотрим в полуплоскости  $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$  гиперболическое дифференциально-разностное уравнение, согласно терминологии [3], содержащее сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - bu(x - h, t), \quad (1)$$

где  $a, b, h \neq 0$  – заданные вещественные числа.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора  $L$  уравнения (1) равна  $\text{Re}L(\xi) = -a^2\xi^2 - b \cos(h\xi)$ . Будем называть оператор  $-L$  положительным, если выполняется условие  $-\text{Re}L(\xi) > 0$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^1$ , т.е. справедливо неравенство

$$a^2\xi^2 + b \cos(h\xi) > 0. \quad (2)$$

В дальнейшем будем считать оператор  $-L$  положительным.

**Определение 1.** Функция  $u(x, t)$  называется классическим решением уравнения (1), если в каждой точке полуплоскости  $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$  существуют классические, т.е. определенные в смысле пределов отношений конечных разностей, производные  $u_{tt}$  и  $u_{xx}$ , и в каж-

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: zaitseva@cs.msu.ru

дой точке этой полуплоскости выполняется соотношение (1).

Применив к равенству (1) преобразование Фурье  $F_x$ , перейдем к двойственной переменной  $\xi$ , и с учетом формул

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f], \quad F_x[f(x-h)] = e^{ih\xi} F_x[f],$$

получим для функции  $\hat{u}(\xi, t) = F_x[u](\xi, t)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \hat{u}(\xi, t)}{dt^2} = -(a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi}) \hat{u}(\xi, t), \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \pm \sqrt{-(a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi})} = \\ &= \pm i \sqrt{a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi}} = \pm i \rho(\xi) e^{i\varphi(\xi)}, \end{aligned}$$

где

$$\rho(\xi) := [(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)]^{1/4}, \quad (4)$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)}. \quad (5)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= C_1(\xi) e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i \sin\varphi(\xi)]} + \\ &+ C_2(\xi) e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i \sin\varphi(\xi)]} = \\ &= C_1(\xi) e^{-it\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi) - i \cos\varphi(\xi)]} + \\ &+ C_2(\xi) e^{it\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi) - i \cos\varphi(\xi)]}, \end{aligned}$$

где  $C_1(\xi)$  и  $C_2(\xi)$  – произвольные постоянные, зависящие от параметра  $\xi$ . Положим  $C_1(\xi) = 1$  и  $C_2(\xi) = 0$ , тогда из последнего равенства будем иметь

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-itG_1(\xi)} e^{itG_2(\xi)}, \quad (6)$$

где

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin(h\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos(h\xi). \quad (7)$$

Применив к равенству (6) обратное преобразование Фурье  $F_\xi^{-1}$ , получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itG_1(\xi)} e^{itG_2(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - x\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) d\xi + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi) d\xi.$$

На основании (8), рассуждая так же, как и в [10], докажем теорему.

**Теорема.** *При выполнении условия (2) функции*

$$F(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi), \quad (9)$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi), \quad (10)$$

где  $G_1(\xi)$  и  $G_2(\xi)$  определяются равенствами (7), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

**Доказательство.** Подставим сначала функцию (9) непосредственно в уравнение (1). Для этого найдем

$$F_x(x, t; \xi) = \xi e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_{xx}(x, t; \xi) = -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$\begin{aligned} F_t(x, t; \xi) &= -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &- G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ 2G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (7) будем иметь  $2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi)$ . Так как аргумент  $\varphi(\xi)$  определяется выражением (5), то имеет место неравенство  $|2\varphi(\xi)| < \frac{\pi}{2}$ , а следовательно,  $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ . Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi(\xi) &= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ &= \operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \right) \times \\ &\times \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \left( \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \right) \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \left[ 1 + \frac{b^2 \sin^2(h\xi)}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2} \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \times \\ &\times \left[ \frac{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условия (2) и формулы (4) из последнего равенства получим  $\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b \sin(h\xi)}{\rho^2(\xi)}$ , откуда следует, что  $2G_1(\xi)G_2(\xi) = b \sin(h\xi)$ .

При установленном выполнении неравенства  $\cos 2\varphi(\xi) > 0$  и условии (2) вычислим теперь

$$\begin{aligned} G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) &= \rho^2(\xi) [\sin^2 \varphi(\xi) - \cos^2 \varphi(\xi)] = \\ &= -\rho^2(\xi) \cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ &= -\rho^2(\xi) \left[ \frac{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)} \right]^{1/2} = \\ &= -a^2 \xi^2 - b \cos(h\xi). \end{aligned}$$

С учетом найденных выражений  $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$  и  $2G_1(\xi)G_2(\xi)$  из равенства (11) получим

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) &= \\ &= -(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &\quad + b \sin(h\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned}$$

Подставив найденные производные  $F_{tt}$  и  $F_{xx}$  в уравнение (1), будем иметь

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) - a^2 F_{xx}(x, t; \xi) &= \\ &= -be^{-tG_1(\xi)} [\cos(tG_2(\xi) - x\xi) \cos(h\xi) - \\ &\quad - \sin(tG_2(\xi) - x\xi) \sin(h\xi)] = \\ &= -be^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bF(x - h, t; \xi), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы для семейства функций  $F(x, t; \xi)$  при любом вещественном значении параметра  $\xi$ .

Аналогично проверим, что и функция (10) удовлетворяет уравнению (1) в каждой точке полу平面  $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ . Вычислим

$$\begin{aligned} H_x(x, t; \xi) &= -\xi e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_{xx}(x, t; \xi) &= -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_t(x, t; \xi) &= -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &\quad + G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &\quad - 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) = \\ &= -(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &\quad - b \sin(h\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned}$$

Подставив производные  $H_{tt}$  и  $H_{xx}$  в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} H_{tt}(x, t; \xi) - a^2 H_{xx}(x, t; \xi) &= \\ &= -be^{-tG_1(\xi)} [\sin(tG_2(\xi) - x\xi) \cos(h\xi) + \\ &\quad + \cos(tG_2(\xi) - x\xi) \sin(h\xi)] = \\ &= -be^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bH(x - h, t; \xi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условия (2) семейство функций

$$G(x, t; \alpha, \beta, \xi) := \alpha e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ + \beta e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

где  $G_1(\xi)$  и  $G_2(\xi)$  определяются равенствами (7), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров  $\alpha, \beta$  и  $\xi$ .

Выясним теперь, какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты уравнения  $a, b$  и сдвиг  $h$ , чтобы выполнялось условие (2) для любого вещественного значения  $\xi$ . Рассмотрим функцию  $a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)$  при  $\xi \in [0, +\infty)$ . Производная этой функции равна

$$2a^2 \xi - bh \sin(h\xi) = 2a^2 \xi \left( 1 - \frac{bh^2 \sin(h\xi)}{2a^2 h\xi} \right).$$

Так как  $\frac{\sin(h\xi)}{h\xi} \rightarrow 1$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $\frac{\sin(h\xi)}{h\xi} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , то производная неотрицательна на промежутке  $\xi \in [0, +\infty)$  при выполнении условия

$$0 < b \leq \frac{2a^2}{h^2}, \quad (12)$$

тогда функция  $a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)$  при  $\xi \in [0, +\infty)$  не убывает и принимает наименьшее значение, равное  $b > 0$ . В силу четности функции, это значение является наименьшим для всех вещественных  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ . Тем самым мы показали, что условие (2), при котором справедлива теорема, выполняется, если коэффициенты уравнения  $a, b$  и сдвиг  $h$  удовлетворяют соотношению (12).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность участникам научно-исследовательского семинара факультета ВМК МГУ по спектральной теории дифференциальных операторов и актуальным вопросам математической физики под руководством академика РАН Е.И. Моисеева и проф. И.С. Ломова, а именно Ш.А. Алимову, А.В. Боровских, В.Н. Денисову, С.М. Ситнику за полезные обсуждения данной работы, а также А.Б. Муравнику за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernoulli J.* Meditationes. Dechordis vibrantibus / Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1728. V. 3. P. 13–28.
2. *Burkhardt H.* Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Jahresber. Deutsch. Math. 1908. V. 10. S. 1–1804.
3. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley and Los Angeles: University of California press, 1958. 262 p.
4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional-differential equations and applications. Basel, Boston, B.: Birkhäuser, 1997. 294 p.
5. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
6. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 52. С. 3–143.
7. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 4. С. 566–576.
8. *Muravnik A.* On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several non-local terms // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.
9. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач // Соврем. мат. фундам. направл. 2017. V. 63. № 4. С. 678–688.
10. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 747–762.
11. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. <https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1857372>
12. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. фундам. направл. 2008. Т. 30. С. 3–173.
13. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. С. 44–46.
14. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
15. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.

CLASSICAL SOLUTIONS OF HYPERBOLIC EQUATION  
WITH NONLOCAL POTENTIALN. V. Zaitseva<sup>a</sup><sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

A three-parametric family of global solutions of a two-dimensional hyperbolic differential-difference equation with non-local potential is constructed. The theorem that the obtained solutions are classical is proved.

*Keywords:* hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution