

УДК 517.956.32+517.929

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2021 г. Н. В. Зайцева^{1,*}

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 24.02.2021 г.

Поступило 26.02.2021 г.

После доработки 26.02.2021 г.

Принято к публикации 16.03.2021 г.

Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с нелокальным потенциалом построено трехпараметрическое семейство глобальных решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение

DOI: 10.31857/S2686954321030152

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено И. Бернулли [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Рассмотренное им уравнение встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других математиков (см., например, [2] и имеющуюся там библиографию). В книге [3] приведен обширный материал по теории линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами, часто встречающимися в теории автоматического регулирования.

Изучение задач механики сплошных сред привело в дальнейшем к рассмотрению дифференциально-разностных уравнений с частными производными. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для указанных уравнений в ограниченных областях (см., например, [4, 5] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях подробно изучены задачи для параболических [6] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [7–11]. В частности, в работах [10, 11] рассматриваются сильно эллиптические уравнения с нелокальными потенциалами по одной из пространственных переменных, встречающиеся в моделях нелинейной оптики. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по пе-

ременной времени [12]. В работах [13–15] рассмотрены гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной.

В настоящей работе рассмотрим в полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ гиперболическое дифференциально-разностное уравнение, согласно терминологии [3], содержащее сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - bu(x - h, t), \quad (1)$$

где $a, b, h \neq 0$ – заданные вещественные числа.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора L уравнения (1) равна $\text{Re}L(\xi) = -a^2\xi^2 - b \cos(h\xi)$. Будем называть оператор $-L$ положительным, если выполняется условие $-\text{Re}L(\xi) > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$, т.е. справедливо неравенство

$$a^2\xi^2 + b \cos(h\xi) > 0. \quad (2)$$

В дальнейшем будем считать оператор $-L$ положительным.

Определение 1. Функция $u(x, t)$ называется классическим решением уравнения (1), если в каждой точке полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ существуют классические, т.е. определенные в смысле пределов отношений конечных разностей, производные u_{tt} и u_{xx} , и в каж-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: zaitseva@cs.msu.ru

дой точке этой полуплоскости выполняется соотношение (1).

Применив к равенству (1) преобразование Фурье F_x , перейдем к двойственной переменной ξ , и с учетом формул

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f], \quad F_x[f(x-h)] = e^{ih\xi} F_x[f],$$

получим для функции $\hat{u}(\xi, t) = F_x[u](\xi, t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \hat{u}(\xi, t)}{dt^2} = -(a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi}) \hat{u}(\xi, t), \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{-(a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi})} = \\ = \pm i \sqrt{a^2 \xi^2 + b e^{ih\xi}} = \pm i \rho(\xi) e^{i\varphi(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := [(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)]^{1/4}, \quad (4)$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \arctg \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)}. \quad (5)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) определяется по формуле

$$\hat{u}(\xi, t) = C_1(\xi) e^{i\rho(\xi)[\cos \varphi(\xi) + i \sin \varphi(\xi)]} + \\ + C_2(\xi) e^{-i\rho(\xi)[\cos \varphi(\xi) + i \sin \varphi(\xi)]} = \\ = C_1(\xi) e^{-i\rho(\xi)[\sin \varphi(\xi) - i \cos \varphi(\xi)]} + \\ + C_2(\xi) e^{i\rho(\xi)[\sin \varphi(\xi) - i \cos \varphi(\xi)]},$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ . Положим $C_1(\xi) = 1$ и $C_2(\xi) = 0$, тогда из последнего равенства будем иметь

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-iG_1(\xi)} e^{iG_2(\xi)}, \quad (6)$$

где

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin(h\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos(h\xi). \quad (7)$$

Применив к равенству (6) обратное преобразование Фурье F_x^{-1} , получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} e^{iG_2(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} e^{i(G_2(\xi) - x\xi)} d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) d\xi + \quad (8)$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi) d\xi.$$

На основании (8), рассуждая так же, как и в [10], докажем теорему.

Теорема. При выполнении условия (2) функции

$$F(x, t; \xi) := e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi), \quad (9)$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi), \quad (10)$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (7), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

Доказательство. Подставим сначала функцию (9) непосредственно в уравнение (1). Для этого найдем

$$F_x(x, t; \xi) = \xi e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_{xx}(x, t; \xi) = -\xi^2 e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_t(x, t; \xi) = -G_1(\xi) e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ - G_2(\xi) e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$F_{tt}(x, t; \xi) = [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-iG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ + 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-iG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi). \quad (11)$$

С учетом (7) будем иметь $2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi)$. Так как аргумент $\varphi(\xi)$ определяется выражением (5), то имеет место неравенство $|2\varphi(\xi)| < \frac{\pi}{2}$, а следовательно, $\cos 2\varphi(\xi) > 0$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ = \operatorname{tg} \left(\arctg \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \right) \times \\ \times \left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\arctg \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \right) \right]^{-1/2} = \\ = \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \left[1 + \frac{b^2 \sin^2(h\xi)}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2} \right]^{-1/2} = \\ = \frac{b \sin(h\xi)}{a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi)} \times \\ \times \left[\frac{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2}{(a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi))^2 + b^2 \sin^2(h\xi)} \right]^{1/2}.$$

В силу условия (2) и формулы (4) из последнего равенства получим $\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b \sin(h\xi)}{\rho^2(\xi)}$, откуда следует, что $2G_1(\xi)G_2(\xi) = b \sin(h\xi)$.

При установленном выполнении неравенства $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ и условии (2) вычислим теперь

$$\begin{aligned} G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) &= \rho^2(\xi)[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)] = \\ &= -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ &= -\rho^2(\xi)\left[\frac{(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))^2}{(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))^2 + b^2\sin^2(h\xi)}\right]^{1/2} = \\ &= -a^2\xi^2 - b\cos(h\xi). \end{aligned}$$

С учетом найденных выражений $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ и $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ из равенства (11) получим

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) &= \\ &= -(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ b\sin(h\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned}$$

Подставив найденные производные F_{tt} и F_{xx} в уравнение (1), будем иметь

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) - a^2F_{xx}(x, t; \xi) &= \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}[\cos(tG_2(\xi) - x\xi)\cos(h\xi) - \\ &- \sin(tG_2(\xi) - x\xi)\sin(h\xi)] = \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bF(x - h, t; \xi), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы для семейства функций $F(x, t; \xi)$ при любом вещественном значении параметра ξ .

Аналогично проверим, что и функция (10) удовлетворяет уравнению (1) в каждой точке полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$. Вычислим

$$\begin{aligned} H_x(x, t; \xi) &= -\xi e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_{xx}(x, t; \xi) &= -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_t(x, t; \xi) &= -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi), \\ H_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)]e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &- 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) = \\ &= -(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi))e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi) - \\ &- b\sin(h\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi). \end{aligned}$$

Подставив производные H_{tt} и H_{xx} в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} H_{tt}(x, t; \xi) - a^2H_{xx}(x, t; \xi) &= \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}[\sin(tG_2(\xi) - x\xi)\cos(h\xi) + \\ &+ \cos(tG_2(\xi) - x\xi)\sin(h\xi)] = \\ &= -be^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bH(x - h, t; \xi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. При выполнении условия (2) семейство функций

$$\begin{aligned} G(x, t; \alpha, \beta, \xi) &:= \alpha e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) + \\ &+ \beta e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi), \end{aligned}$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (7), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров α, β и ξ .

Выясним теперь, какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты уравнения a, b и сдвиг h , чтобы выполнялось условие (2) для любого вещественного значения ξ . Рассмотрим функцию $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)$ при $\xi \in [0, +\infty)$. Производная этой функции равна

$$2a^2\xi - bh\sin(h\xi) = 2a^2\xi\left(1 - \frac{bh^2\sin(h\xi)}{2a^2h\xi}\right).$$

Так как $\frac{\sin(h\xi)}{h\xi} \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow 0$ и $\frac{\sin(h\xi)}{h\xi} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$, то производная неотрицательна на промежутке $\xi \in [0, +\infty)$ при выполнении условия

$$0 < b \leq \frac{2a^2}{h^2}, \quad (12)$$

тогда функция $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)$ при $\xi \in [0, +\infty)$ не убывает и принимает наименьшее значение, равное $b > 0$. В силу четности функции, это значение является наименьшим для всех вещественных $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Тем самым мы показали, что условие (2), при котором справедлива теорема, выполняется, если коэффициенты уравнения a, b и сдвиг h удовлетворяют соотношению (12).

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность участникам научно-исследовательского семинара факультета ВМК МГУ по спектральной теории дифференциальных операторов и актуальным вопросам математической физики под руководством академика РАН Е.И. Моисеева и проф. И.С. Ломова, а именно Ш.А. Алимову, А.В. Боровских, В.Н. Денисову, С.М. Ситнику за полезные обсуждения данной работы, а также А.Б. Муравнику за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernoulli J.* Meditationes. De chordis vibrantibus / Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1728. V. 3. P. 13–28.
2. *Burkhardt H.* Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Jahresber. Deutsch. Math. 1908. V. 10. S. 1–1804.
3. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley and Los Angeles: University of California press, 1958. 262 p.
4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional-differential equations and applications. Basel, Boston, B.: Birkhauser, 1997. 294 p.
5. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
6. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 52. С. 3–143.
7. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 4. С. 566–576.
8. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several non-local terms // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.
9. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач // Соврем. мат. фундам. направл. 2017. V. 63. № 4. С. 678–688.
10. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 747–762.
11. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. <https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1857372>
12. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. фундам. направл. 2008. Т. 30. С. 3–173.
13. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. С. 44–46.
14. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
15. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.

CLASSICAL SOLUTIONS OF HYPERBOLIC EQUATION WITH NONLOCAL POTENTIAL

N. V. Zaitseva^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

A three-parametric family of global solutions of a two-dimensional hyperbolic differential-difference equation with non-local potential is constructed. The theorem that the obtained solutions are classical is proved.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution