

УДК 519.62

## ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА С ПОРАЖАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

© 2021 г. Академик РАН В. И. Бердышев<sup>1,\*</sup>

Поступило 23.03.2021 г.  
После доработки 27.04.2021 г.  
Принято к публикации 28.04.2021 г.

Телесный наблюдатель  $f$ , отслеживающий движущегося по заданной траектории  $\mathcal{T}$  объекта  $t$  со скоростным поражающим устройством, вынужден скрываться за выпуклые фрагменты окружающей среды. Предлагается способ построения траектории  $\mathcal{T}_f$  наблюдателя, обеспечивающей возможность следить за движением объекта на возможно большей части траектории  $\mathcal{T}$ . В предположении ухода наблюдателя в укрытие по  $\mathcal{T}_f$  на постоянной максимальной скорости, объект  $t$  выбирает оптимальный скоростной режим движения на своей траектории.

*Ключевые слова:* навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

**DOI:** 10.31857/S2686954321040032

1. В заданном коридоре  $Y \subset \mathbb{R}^3$ , граница которого гомеоморфна сфере, движется объект  $t$  со скоростным поражающим мини-объектом  $m$ . В  $\mathbb{R}^3$  имеется множество  $G$ ,  $G \cap Y = \emptyset$ , являющееся замыканием открытого множества, препятствующее видимости и движению. Наблюдатель  $f$ , недружественный по отношению к объекту  $t$ , опасаясь мини-объекта, располагается вблизи выпуклых фрагментов границы  $\partial G$  множества  $G$ . Такой фрагмент, далее обозначаемый через  $S$ , должен обеспечить возможность наблюдателю укрыться от  $m$ . Скорость  $v_m$  мини-объекта  $m$  существенно превосходит скорости  $v_f, v_t$  наблюдателя и объекта, при этом  $v_t \geq \underline{v} > 0$ , где  $\underline{v}$  – минимальная скорость объекта.

Пусть объект  $t$ , движущийся по своей траектории  $\mathcal{T} \subset Y$ , проходя точку  $t_0 \in \mathcal{T}$ , обнаружил наблюдателя  $f \notin Y$ , демаскировавшего себя. Учитывая возможность немедленного запуска мини-объекта, наблюдатель занимает исходное для движения положение  $f_0$ , имея точку  $t_0$  в зоне

видимости и рассчитывая уйти в укрытие за время  $\bar{\tau} = \mathcal{R}/v_m$ , где  $\mathcal{R} = \|f_0 - t_0\|$ . Одновременно с перемещением из начального положения  $f_0$  в укрытие наблюдатель продолжает по мере возможности следить за движением объекта  $t$ . В предлагаемой модели объект и мини-объект  $m$  изображаются точками, а наблюдатель – шаром  $V_\varepsilon(f)$  радиуса  $\varepsilon > 0$ , в центре  $f$  которого расположено средство наблюдения. Попадание мини-объекта в шар  $V_\varepsilon(f)$  означает гибель наблюдателя.

Траектория объекта – это кривая  $\mathcal{T} \subset Y$  (маршрут) в совокупности со скоростным режимом  $v_t$  движения объекта по ней. Требуется выяснить возможности наблюдателя следить за объектом в безопасном для себя режиме, а объекта – уклониться от наблюдения на участке траектории от момента  $\tau = 0$  прохождения объектом точки  $t_0$  до момента  $\bar{\tau}$  полного укрытия наблюдателя.

В данной работе предлагается траектория  $\mathcal{T}_f$  наблюдателя, позволяющая ему следить за движением объекта  $t$  на максимально длинном, начинающемся в точке  $t_0$  участке траектории  $\mathcal{T}$ . Кроме того, указывается оптимальная для объекта  $t$  тактика выбора скорости  $v_t$  на временном участке  $[0, \bar{\tau}]$ .

<sup>1</sup> Институт математики и механики  
им. Н.Н. Красовского Уральского отделения  
Российской академии наук, Екатеринбург, Россия  
\*E-mail: bvi@imm.uran.ru

Задачам движения объектов в среде с препятствиями посвящена, например, работа [1], см. также [2, 3].

2. Фрагмент  $S$  — связная открытая на  $\partial G$  выпуклая поверхность: в каждой ее точке существует опорная к  $S$  плоскость, относительно которой  $S$  расположена по одну сторону. Наблюдатель  $f$  выбирает фрагмент  $S$  и свое начальное положение  $f_0$  так, чтобы:

1) расстояние  $\rho(t_0, S)$  было достаточно большим для обеспечения наблюдателю возможности укрыться от мини-объекта, стартовавшего из точки  $t_0$ ;

$$2) \inf \{\|x - y\| : x \in S, y \in Y\} > \varepsilon;$$

3) существовал шар  $V_\varepsilon(\bar{f})$ , удовлетворяющий включению

$$V_\varepsilon(\bar{f}) \subset \text{co}(t_0, S) \setminus \text{conv}(t_0 \cup S), \quad (1)$$

где

$$\text{co}(t_0, S) = \{t_0 + \lambda(x - t_0) : x \in S, \lambda \geq 0\}$$

есть конус с вершиной  $t_0$ , натянутый на  $S$ , а  $\text{conv}(t_0 \cup S)$  — выпуклая оболочка объединения  $t_0 \cup S$ ;

4) время  $\bar{\tau}$  на процесс перехода наблюдателя в положение  $V_\varepsilon(\bar{f}) : V_\varepsilon(f_\tau) : 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ , было бы не больше, чем  $R/v_m$ , где  $f_\tau = \bar{f}$ , далее предполагается, что  $\bar{f}$  — ближайшая к  $f_0$  из точек, удовлетворяющих включению (1);

5) существует плоскость  $Q$ , содержащая точку  $t_0$ , опорная к  $S$  в некоторой точке  $s \in S$ , при этом  $S$  и точка  $y_s \in Y$ , ближайшая к  $s$ , расположены по разные стороны от  $Q$ .

Объект  $t$  движется через точку  $t_0$  в сторону точки  $y_s$ . Траектория движения центра шара  $V_\varepsilon(f_\tau)$  при переходе из положения  $V_\varepsilon(f_0)$  в положение  $V_\varepsilon(f_\tau)$  обозначается через  $\mathcal{T}_f$ . Естественно предположить, что  $\rho(f_\tau, S) = \varepsilon$  ( $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ ) и наблюдатель движется по  $\mathcal{T}_f$  с постоянной максимальной скоростью  $v_f$ . Ради простоты будем предполагать, что поверхность  $S$  строго выпукла, т.е. не содержит прямолинейных отрезков. Нам понадобится лишь часть поверхности  $S$ , расположенная между  $Q$  и параллельной ей плоскостью  $\bar{Q}$ , содержащей точку  $\bar{f}$ , и все построения будут производиться “выше” плоскости  $\bar{Q}$ . Пусть

$$f_\tau \in \mathcal{T}_f, \quad K_\tau = K_{f_\tau} = \text{co}(f_\tau, S), \quad B_\tau = S \cap \partial K_\tau,$$

где  $\partial K_\tau$  — граница конуса  $K_\tau$ . Определим конечную поверхность  $k_\tau \subset \partial K_\tau$ ,  $k_\tau = \{b + \lambda(b - f_\tau) :$

$\lambda > 0, b \in B_\tau\}$  и множество  $\mathcal{H}_\tau = \text{conv}(k_\tau \cup S)$  — это множество точек, невидимых из точки  $k_\tau$ .

Лемма 1. *Отображения  $\tau \rightarrow K_\tau \cap V_R(s)$ ,  $\tau \rightarrow \mathcal{H}_\tau \cap V_R(s)$  непрерывны по Хаусдорфу, где  $R = \|t_0 - f_0\|$ .*

3. Пусть  $S_\varepsilon$  — часть поверхности  $\{x : \rho(x, S) = \varepsilon\}$ , невидимая из точки  $t_0$ , расположенная между плоскостями  $Q, \bar{Q}$ . Определим на  $S_\varepsilon$  систему координат  $\{(h, \varphi)\}$  так, что ее ось — луч с началом в центре отрезка  $Z \cap \bar{Q} \cap \text{conv} S$ , содержащий точку  $s$ , где  $Z$  — плоскость, натянутая на точки  $t_0, s, \bar{f}$ ; “широта”  $h$  определяется положением плоскости  $Q_h = (1 - h)\bar{Q} + hQ$ ,  $0 \leq h \leq 1$ ,  $(h, \varphi) \in Q_h$ ; “долгота”  $\varphi$  — величина угла, на который следует повернуть вокруг оси плоскость  $Z$  до поглощения точки  $(h, \varphi)$ .

В простейшем случае, когда  $\mathcal{T}_f \subset Z$ , справедливо соотношение  $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}_{\tau'}$  ( $\tau' \leq \tau$ ), из которого следует, что для близких к нулю  $\tau$  начальная часть траектории  $\mathcal{T}$  содержится в  $\mathcal{H}_\tau^\circ$  и, значит, не видна наблюдателю  $f_\tau$ , где  $\mathcal{H}_\tau^\circ$  — внутренность множества  $\mathcal{H}$ . От этого недостатка можно избавиться, изменив начальную часть траектории  $\mathcal{T}_f$ . Если наблюдатель из начальной точки  $f_0$  пройдет участок  $f_\varphi = (1, \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \delta$ , при малом  $\delta$ , то весь отрезок  $[s, t_0]$  и начальная часть траектории  $\mathcal{T}$  окажутся вне множества  $\mathcal{H}_{f_\varphi}^\circ$  и будут видны наблюдателю  $f_\varphi$ .

4. Поскольку  $\bar{f}$  — ближайшая к  $f_0$  точка из  $S_\varepsilon$ , удовлетворяющая включению (1), то для любой траектории

$$\mathcal{T}_f = \{f_\tau : 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}, f_\tau = \bar{f}\} \subset S_\varepsilon, \quad (2)$$

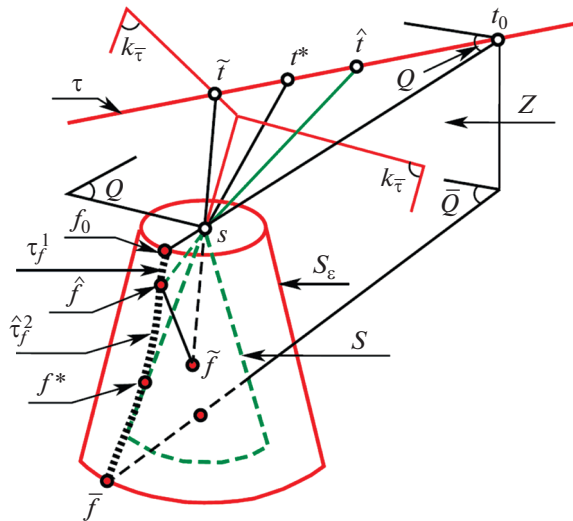
где  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_f$  — время движения наблюдателя из  $f_0$  в точку  $\bar{f}$ , множество

$$W = \left[ \bigcup_{0 \leq \tau < \bar{\tau}} V_\varepsilon(f_\tau) \right] \setminus \text{co}(t_0, S)$$

непусто. Время движения  $\bar{\tau}_f$  наблюдателя на траектории  $\mathcal{T}_f$  должно удовлетворять неравенству

$$\bar{\tau}_f = \frac{|\mathcal{T}_f|}{v_f} \leq \tau_m = \frac{\rho(t_0, W)}{v_m}, \quad (3)$$

где  $|\mathcal{T}_f|$  — длина траектории  $\mathcal{T}_f$ ,  $\tau_m$  — время движения мини-объекта  $m$  от  $t_0$  до множества  $W$ . Заметим, что в момент времени  $\tau_m$  наблюдатель должен прибыть в точку  $\bar{f}$ , иначе он будет уничтожен мини-объектом. После занятия позиции  $V_\varepsilon(\bar{f})$  наблюдатель выключает излучающее устройство.



**Рис. 1.** Оптимальная траектория наблюдателя. На рисунке плоскости  $Q, \bar{Q}, Z$ , траектория  $\mathcal{T}$ , граница  $k_\tau$  конуса  $K_\tau$  и поверхность  $S_\varepsilon$  изображены сплошными линиями, поверхность  $S$  – штриховой, оптимальная траектория  $\hat{\mathcal{T}}_f$  – пунктирной линиями.

Из условия (1) следует, что  $\mathcal{H}_f^\circ$  содержит отрезок  $(s, t_0]$  и начальную часть траектории  $\mathcal{T}$ . Пусть  $\tilde{t} \in \mathcal{T}$  – ближайшая к  $t_0$  точка из пересечения  $\mathcal{T} \cap k_{\bar{f}}$ . Далее через  $\mathcal{T}$  будем обозначать участок траектории объекта между точками  $t_0$  и  $\tilde{t}$ .

Задача наблюдателя – поиск траектории  $\hat{\mathcal{T}}_f$ , удовлетворяющей условиям (3)–(4), которая позволит отслеживать движение объекта на возможной большей части траектории  $\mathcal{T}$ .

5. Вначале рассмотрим частный случай, когда  $S$  является выпуклым конусом с вершиной  $s$  и, значит, конус  $K_\tau$  является частью двугранного угла с гранями, касающимися боковой поверхности конуса  $S$ . Введем отображение траектории  $\mathcal{T}$  на поверхность  $S_\varepsilon$ :

$$z \rightarrow f(z) : s \in [z, f(z)] \quad (z \in \mathcal{T}, f(z) \in S_\varepsilon), \quad (4)$$

тогда  $f(t_0) = f_0$ , и обозначим

$$\mathcal{T}_f^* = \{f(z) : z \in \mathcal{T}\}, \quad \mathcal{T}_f^* \subset S_\varepsilon, \quad \tilde{f} = f(\tilde{t}).$$

Наложим на  $\mathcal{T}$  дополнительное условие:

(E) Для любой точки  $z \in \mathcal{T}$  выполняется соотношение  $K_{f(z)} \cap \mathcal{T} = z$ .

При этом условии отображение (4) гомеоморфно. Класс кривых, удовлетворяющих условию (E), достаточно широк. В частности, он содержит прямолинейные траектории, не содержащиеся в плоскости  $Z$ . Условие (E) гарантирует наблюдателю  $f$  видимость всей траектории  $\mathcal{T}$  при

движении по траектории  $\mathcal{T}_f^*$ . Но  $f$  хотел бы наблюдать движение объекта на максимально протяженном участке. Далее через  $\mathcal{T}_f(f', f'')$  обозначается часть траектории  $\mathcal{T}_f$  между точками  $f'$  и  $f''$ .

Пусть  $t \in \mathcal{T}$ ,  $f = f(t)$ . Определим верхнюю грань

$$\hat{\rho} = \left\{ \sup_{t \in \mathcal{T}} \rho(t_0, t) : f(t) \in \mathcal{T}_f^*, \frac{\rho(f_0, f) + d(f, \tilde{f})}{v_f} \leq \tau_m \right\}, \quad (5)$$

где  $\rho(t_0, t)$  – длина участка траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до  $t$ ,  $\rho(f_0, f)$  – длина участка траектории  $\mathcal{T}_f^*$  от  $f_0$  до  $f$ ,  $d(f, \tilde{f})$  – длина кратчайшей кривой на поверхности  $S_\varepsilon$ , соединяющей точки  $f$  и  $\tilde{f}$ . Найдем точки  $\hat{t} \in \mathcal{T}$  и  $\hat{f} \in \mathcal{T}_f^*$ ,  $\hat{f} = f(\hat{t})$  (см. (4)), реализующие верхнюю грань (5).

Поскольку  $\mathcal{T} \subset K_{\bar{f}}^\circ$ , то  $\hat{f} \neq \tilde{f}$ . Искомую траекторию  $\hat{\mathcal{T}}_f$  составим из двух дуг:

$$\hat{\mathcal{T}}_f = \mathcal{T}_f^1 \cup \mathcal{T}_f^2,$$

первая является замыканием части траектории  $\mathcal{T}_f^*$  (см. рис. 1), ограниченной точками  $f_0$  и  $\hat{f}$ , т.е.  $\mathcal{T}_f^1 = \mathcal{T}_f^*(f_0, \hat{f})$ , вторая – кратчайшая кривая на поверхности  $S_\varepsilon$ , соединяющая точки  $\hat{f}$  и  $\tilde{f}$ .

Двигаясь по траектории  $\mathcal{T}_f^1$ , наблюдатель видит всю траекторию  $\mathcal{T}$  объекта. Переход наблю-

дателя  $f = (h, \varphi)$  на дугу  $\mathcal{T}_f^2$  и дальнейшее движение в сторону точки  $\bar{f}$  влечет уменьшение ширины  $h$  и возникновение невидимого наблюдателем участка  $\mathcal{T} \cap \mathcal{K}_f^\circ$ . При стремлении наблюдателя  $f$  к  $\bar{f}$  множество  $\mathcal{K}_f \cap V_R(s)$  сходится к  $\mathcal{K}_{\bar{f}} \cap V_R(s)$  в метрике Хаусдорфа (см. лемму 1). По построению множество  $\mathcal{K}_{\bar{f}}^\circ$  содержит траекторию  $\mathcal{T}$ . Поэтому существует позиция  $f^* = f_{\tau^*} \in \mathcal{T}_f^2$  такая, что для всех последующих позиций  $f, f \rightarrow \bar{f}$ , дуга траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до некоторой точки  $t_f \in \mathcal{T}$  содержится в  $\mathcal{K}_f^\circ$ , т.е. лежит вне зоны видимости наблюдателя, и при этом  $\rho(t_f, k_{\bar{\tau}}) \rightarrow 0$  (при  $f \rightarrow \bar{f}$ ). Отсюда, в частности, следует, что часть траектории  $\mathcal{T}$  от  $t^* = z(f^*)$  до точки  $\tilde{t}$  не удовлетворяет условию (E) и, как уже отмечалось,  $\hat{f} \neq \bar{f}$ , где  $z(f)$  – обратное к (4) отображение.

Объект  $t$ , предполагая, что наблюдатель намерен двигаться по приведенной выше траектории  $\hat{\mathcal{T}}_f$  с постоянной максимальной скоростью, и стремясь сократить длину траектории, пройденной под наблюдением, будет придерживаться следующей тактики движения.

**В а р и а н т 1.** Во временном промежутке  $[0, \tau^*]$  объект движется с минимальной скоростью, преодолев расстояние  $\underline{v} \cdot \tau^*$  под наблюдением. В момент  $\tau^*$  участок траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до точки  $t_f$  попадает в невидимую наблюдателем зону, в которой объект продолжает свое движение, учитывая, что  $t_f \rightarrow \tilde{t}$ , и преодолевает расстояние  $|\mathcal{T}| - \underline{v} \cdot \tau^*$  вне зоны наблюдения.

**В а р и а н т 2.** Объект движется вместе с точкой  $z(f)$  на участке от  $t_0$  до  $\hat{t}$  под наблюдением. Для позиции  $f(t)$  при  $t \in z(\mathcal{T}_f^2)$  выполняется соотношение  $\mathcal{K}_{f(t)}^\circ \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ , поэтому объект в дальнейшем движется, включившись в множество  $\mathcal{K}_{f(t)}^\circ$ , и пройдет вне наблюдения участок длины  $|\mathcal{T}| - \rho(\hat{t}, t_0)$ .

Установлены следующие утверждения.

**Л е м м а 2.** Пусть  $S$  – выпуклая коническая поверхность с вершиной  $s$ ,  $\tilde{t}$  – ближайшая к  $t_0$  точка из пересечения траектории объекта с  $k_{\tau}$ ,  $\mathcal{T}$  – часть траектории объекта, ограниченная точками  $t_0$  и  $\tilde{t}$ ; точка  $\hat{t}$  представляет верхнюю грань (5)  $f_{\hat{\tau}} = \hat{f} = f(\hat{t})$  (см. (4));  $\hat{\mathcal{T}}_f$  – траектория наблюдателя, заданная равенством (6).

Тогда

1) для любого  $\tau \in [0, \hat{\tau}]$  траектория  $\mathcal{T}$  видна наблюдателю  $f_{\tau}$ ;

2)  $\mathcal{K}_{\tau}^\circ \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$  для любого  $\tau \in (\hat{\tau}, \bar{\tau}]$ ;

3) существует  $\tau^* \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$  такой, что для любого  $\tau \in (\tau^*, \bar{\tau})$  найдется точка  $t_{\tau}$ , удовлетворяющая условиям  $t_{\tau} \rightarrow \tilde{t}$  при  $\tau \rightarrow \bar{\tau}$ , и отрезок траектории  $\mathcal{T}$  от до  $t_{\tau}$  содержится в  $\mathcal{K}_{\tau}^\circ$ .

**Т е о р е м а.** Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда существуют  $\tau^* \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$  и скоростной режим движения объекта по траектории  $\mathcal{T}$  (см. варианты 1, 2), позволяющий пройти вне наблюдения концевой участок траектории  $\mathcal{T}$  длины

$$|\mathcal{T}| - \min\{\underline{v} \cdot \tau^*, \rho(t_0, \hat{t})\},$$

где  $|\mathcal{T}|$  – длина траектории  $\mathcal{T}$ ,  $\rho(t_0, \hat{t})$  – длина ее участка от  $t_0$  до  $\hat{t}$ ,  $\underline{v} > 0$  – минимальная скорость объекта  $t$ .

6. В общем случае, когда  $S$  – выпуклая поверхность, найдем

$h^* = \inf\{h: K_{(h, \varphi)} \cap \mathcal{T} = \emptyset\}$ ,  $f^* = f^*(\varphi) = (h^*, \varphi)$  и определим траекторию

$$\mathcal{T}_f^* = \{f^*(\varphi): (h^*, \varphi) \in S_{\varepsilon}\}.$$

Находясь в любой позиции  $f \in \mathcal{T}_f^*$ , наблюдатель видит всю траекторию  $\mathcal{T}$ , так как  $\mathcal{K}_f^\circ \cap \mathcal{T} = \emptyset$ . Используя изложенный выше способ, построим траекторию  $\hat{\mathcal{T}}_f$  (см. (6)). Движение по ней на максимальной скорости гарантирует наблюдателю возможность следить за движением объекта на участке траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до точки  $\min\{\underline{v} \cdot \tau^*, \rho(t_0, \hat{t})\}$  (при оптимальном выборе объектом варианта тактики движения).

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Бердышев В.И., Костюсов В.Б. Визуальные характеристики наблюдения и оптимальные траектории. Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2021. 250 с.

## OPTIMAL TRAJECTORY OF AN OBSERVER TRACKING THE MOVEMENT OF AN OBJECT WITH A STRIKING DEVICE

Academician of the RAS V. I. Berdyshev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

A tight observer  $f$ , tracking an object  $t$  with a high-speed striking device moving along a given trajectory  $\mathcal{T}$ , is forced to hide behind convex fragments of the environment. A method is proposed for constructing the observer's trajectory  $\mathcal{T}_f$ , which makes it possible to follow the movement of the object on the largest possible part of the trajectory  $\mathcal{T}$ . Under the assumption that the observer leaves for a shelter at a constant maximum speed, the object  $t$  chooses the optimal speed mode of movement on its trajectory.

*Keywords:* moving object, solid observer, trajectory