

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 3D-ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВБЛИЗИ ТРЕЩИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ШОНБЕРГА

© 2021 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,2,*}, П. В. Стогний^{1,**}, Н. И. Хохлов^{1,2}

Поступило 18.06.2021 г.
После доработки 18.06.2021 г.
Принято к публикации 08.08.2021 г.

Трещиноватые среды являются важным объектом для исследования, так как в них скапливается нефть, практический интерес представляют трещины гидроразрыва пласта. Исследование таких неоднородностей с помощью методов математического моделирования позволяет рассмотреть различные постановки задач с трещинами различной формы, размеров и другими характеристиками. Модель трещины Шонберга позволяет учесть характеристики флюида внутри трещины, что является крайне важным при проведении геологоразведочных работ. В работе разработан алгоритм расчета параметров среды на границе трещины, заданной моделью Шонберга, с использованием сеточно-характеристического метода. Приводятся результаты применения разработанного алгоритма к решению задачи сейсмического мониторинга трещины гидроразрыва пласта, где наполняющий трещину флюид является необходимой частью для наблюдения.

Ключевые слова: модели трещин, сейсморазведка, сеточно-характеристический метод, гидроразрыв пласта

DOI: 10.31857/S2686954321050076

ВВЕДЕНИЕ

Трещиноватые среды – важная часть геологических структур для исследования. Трещины являются зонами скопления нефти и газа, что представляет особый интерес для геологического сообщества [1, 2]. Однако трещины различаются по форме, размеру, характеристикам содержащегося внутри флюида и другим параметрам, поэтому достаточно сложно разработать одну универсальную модель для описания всех типов трещин [3].

Одной из наиболее распространенных моделей трещин является модель бесконечно тонкой трещины (БТТ) [4]. Такая модель подходит для описания трещин, заполненных газом, что равнозначно использованию контактного условия свободной границы на границах трещины. С точ-

ки зрения построения расчетной области с такими трещинами, модель БТТ не требует дополнительных преобразований расчетной сетки, что является большим преимуществом данной модели. Однако модель БТТ не способна корректно описывать трещины, заполненные различным типом флюида (с различными параметрами плотности, скоростью распространения звука), что ограничивает область прикладных задач для решения. Для учета характеристик флюида внутри трещины существует модель трещины Шонберга [5], в которой трещина определяется через так называемые параметры раскрытости трещины.

В данной работе был разработан подход к моделированию трещиноватых геологических сред для двумерных и трехмерных постановок задач сеточно-характеристическим методом [6] с использованием модели трещины Шонберга. Проведено моделирование распространения сейсмических волн от точечного источника в геологической среде с трещиной с нулевыми параметрами раскрытости, в результате которого волна должна полностью отражаться от трещины, что и достигнуто с применением разработанного алгоритма. Было проведено моделирование для задачи сейсмического мониторинга трещины гидроразрыва пласта с использованием разработанного алго-

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

²Федеральный научный центр “Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”, Москва, Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: stognii@phystech.edu

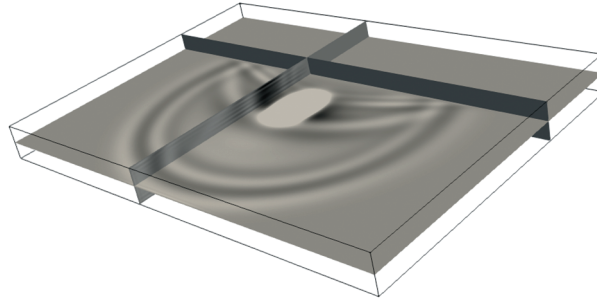


Рис. 1. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{xx} для модели трещины Шонберга с нулевыми параметрами раскрытости для $t = 1$ с.

ритма трещины Шонберга и трещины БГТ, которые продемонстрировали качественное совпадение результатов, но расхождение в количественном соотношении.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования геологической среды, в работе использовалась система уравнений для описания поведения сейсмических волн в линейно-упругих средах [7]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u = (\nabla \cdot \sigma)^T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu((\nabla \times u) + (\nabla \times u)^T), \quad (2)$$

где u – скорость распространения сейсмических волн, ρ – плотность среды, σ – тензор напряжений Коши, t – время, λ и μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала, I – единичный тензор.

Систему (1)–(2) можно привести к виду

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где вектор \mathbf{q} состоит из шести компонент тензора напряжений и трех компонент скорости; матрицы A_x, A_y, A_z составлены из коэффициентов системы (1), (2).

После применения метода расщепления по пространственным координатам получаем три одномерные системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial i} = 0, \quad i = x, y, z. \quad (4)$$

Рассмотрим систему (4), например, для координаты x :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Система (5) – гиперболическая, поэтому ее можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \Omega_x \Lambda_x \Omega_x^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

где Ω_x – матрица из собственных векторов матрицы A_x , Λ_x – диагональная матрица с собственными значениями на диагонали. Собственные значения матриц A_x, A_y, A_z равны $\{-c_p, c_p, -c_s, c_s, -c_s, c_s, 0, 0, 0\}$, где c_p и c_s – продольная и поперечная скорости звука, соответственно, которые можно вычислить по формулам:

$$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (7)$$

После замены переменных $\omega = \Omega_x^{-1} \mathbf{q}$, система (6) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Система уравнений (8) решалась с помощью сеточно-характеристического метода на основе схемы Лакса–Вендроффа [8, 9]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \cdot t}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2 \cdot t^2}{2h^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n). \quad (9)$$

На границе трещины дополнительно были введены условия, описывающие модель трещины Шонберга:

$$\sigma'_{xx} = \sigma^r_{xx}, \quad (10)$$

$$\sigma'_{xy} = \sigma^r_{xy}, \quad (11)$$

$$\sigma'_{xz} = \sigma^r_{xz}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = K_N \cdot (u^r_x - u^l_x), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = K_T \cdot (u^r_y - u^l_y), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = K_T \cdot (u^r_z - u^l_z). \quad (15)$$

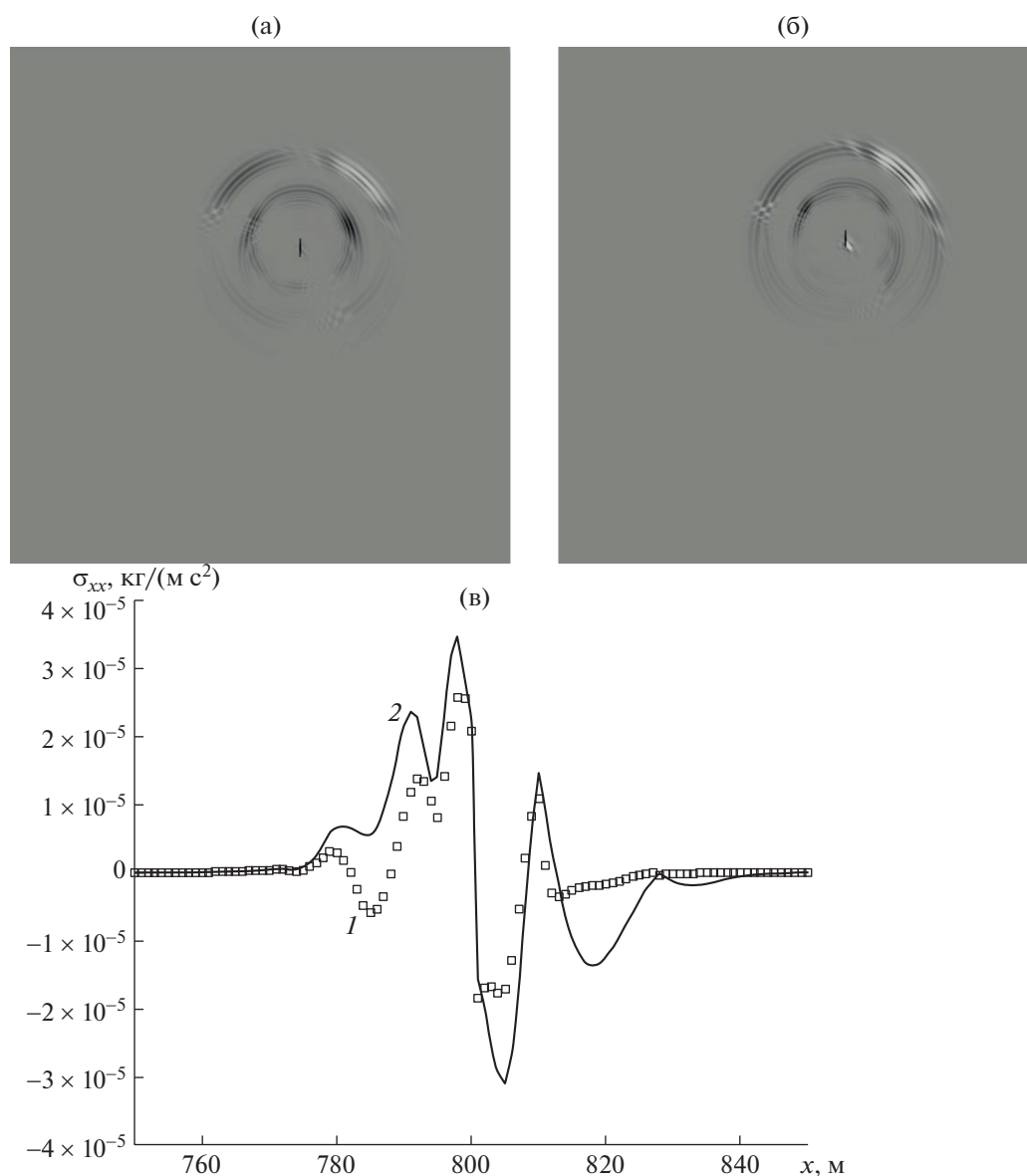


Рис. 2. Распределение тензора напряжений для модели трещины БТТ (1) и модели трещины Шонберга: (2) а – трещина БТТ, б – трещина Шонберга, в – значения компоненты тензора напряжений σ_{xx} , кг/(м с²) для $t = 0.065$ с.

Условия (10)–(12) обозначают равенство нормальных компонент тензора напряжений на границе трещины, условия (13)–(15) – способ вычисления данных компонент. Индексы l и r означают смежные ячейки слева и справа от трещины соответственно. Параметры K_T , K_N – так называемые параметры раскрытости трещины, характеризующие трещину. Их можно вычислить аналитически (с помощью параметров Ляме, плотности и ширины трещины) или с помощью лабораторных экспериментов [10].

Таким образом, после решения уравнений (13)–(15), неизвестными остаются значения трех компонент скорости (V_x , V_y , V_z) и трех компонент

тензора напряжений (σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{yz}). Для их нахождения на границе трещины совместно решалась система уравнений (8)–(12).

ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ ТРЕЩИНЫ С НУЛЕВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РАСКРЫТОСТИ

Для проверки разработанного алгоритма был проведен расчет отражения волны, исходящей от сферического источника, от трещины с нулевыми параметрами раскрытости, что соответствует случаю полного отражения волны от трещины. Трехмерная модель состояла из однородной среды с трещиной в плоскости YZ . Результирующий

отклик от трещины (волновое поле распределения компоненты тензора напряжений σ_{xx}) показан на рис. 1 после отражения от трещины, наблюдается полное отражение волны от трещины, что соответствует постановке задачи.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛИКА ОТ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

Была решена прямая задача получения сейсмического отклика от трещины гидроразрыва пласта. Данная искусственно созданная трещина часто применяется в реальных сейсмических работах для увеличения притока флюида в скважину [11, 12]. Наблюдение за состоянием трещины осуществляется с помощью приемников сигнала, расположенных перед трещиной.

Параметры геологической среды с трещиной были следующими: плотность – 2500 кг/м³, продольная скорость звука – 5000 м/с, поперечная скорость звука – 3000 м/с. Трещина была расположена на расстоянии 300 м от источника, моделирующего подземные сейсмические колебания, возникающие в толще геологической среды). Высота трещины составляла 30 м, ширина – 30 см. Расчетная область составляла 1200 × 1200 м. Параметры флюида, наполняющего трещину, были следующими: плотность – 830 кг/м³, продольная скорость звука – 1290 м/с, поперечная скорость звука – 1290 м/с. В соответствии с данными характеристиками трещины [10], параметры K_N и K_T были равны 4.6×10^9 .

На рис. 2а и 2б представлены аномальные волновые отклики от трещины для модели трещины Шонберга и для модели трещины БТТ. Качественно результаты совпадают, однако количественно значения модуля скорости оказываются больше для откликов от трещины по модели LSM (рис. 2в), что существенно при наблюдении трещины и контроля наполняющего ее флюида.

ВЫВОДЫ

В работе представлен подход к моделированию трещиноватых геологических сред для двумерных и трехмерных постановок задач сеточно-характеристическим методом с использованием модели трещины Шонберга. Описан алгоритм расчета точек на границе трещины. Проведено моделирование распространения сейсмических волн от сферического источника в геологической среде с трещиной с нулевыми параметрами раскрытости. Результаты показали полное отражение волны от трещины, что соответствует постановке задачи. Также была решена задача сейсмического мониторинга для моделирования трещины гидроразрыва пласта с использованием разработанного алгоритма по модели трещины Шонбер-

га и модели трещины БТТ. Результаты продемонстрировали качественное совпадение, но расхождение в количественном соотношении.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00281.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhan Q., Sun Q., Ren Q. A discontinuous Galerkin method for simulating the effects of arbitrary discrete fractures on elastic wave propagation // *Geophys. J. Int.* 2017. V. 210. № 2. P. 1219–1230.
2. Petrov I. Problems of modeling natural and anthropogenic processes in the arctic zone of the Russian Federation // *Math. Models Comput. Simul.* 2019. V. 11. P. 226–246.
3. Petrov I.B., Muratov M.V. The application of grid-characteristic method in solution of fractured formations exploration seismology direct problems (review article) // *Matem. Mod.* 2019. V. 31. № 4. P. 33–56.
4. Stognii P., Khokhlov N., Zhdanov M. Novel approach to modelling the elastic waves in a cluster of subvertical fractures // 81st EAGE Conference and Exhibition 2019.
5. Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68. № 5. P. 1516–1521.
6. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
7. Новацкий В.К. Теория упругости. М., 1975.
8. Ivanov A.M., Khokhlov N.I. Parallel implementation of the grid-characteristic method in the case of explicit contact boundaries // *Comput. Res. Model.* 2018. V. 10. № 5. P. 667–678.
9. Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // *Матем. Моделирование.* 2016. Т. 28. № 2. С. 123–132.
10. Santos J.E., Picotti S., Carcione J. Evaluation of the stiffness tensor of a fractured medium with harmonic experiments // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2012. V. 247–248. P. 130–145.
11. Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G. Mathematical models of hydraulic fracturing // *Comput. Technologies.* 2014. V. 19. № 2. P. 33–61.
12. Howarth R. Methane emissions and climatic warming risk from hydraulic fracturing and shale gas development: implications for policy // *Energy and Emission Control Technologies.* 2015. V. 3. P. 45–54.

MATHEMATICAL MODELING OF 3D DYNAMIC PROCESSES NEAR A FRACTURE USING THE FRACTURE MODEL OF SCHOENBERG

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^{a,b}, P. V. Stognii^a, and N. I. Khokhlov^{a,b}**

^a*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudnyi, Moscow oblast, Russian Federation*

^b*Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

The fractured media are very important objects for investigation because they accumulate oil, the hydraulic fracturing is of great practical interest. The exploration of such heterogeneities with the help of methods of mathematical modelling allows to examine different problem formulations with fractures of different forms, sizes and other characteristics. The fracture model of Schoenberg allows to take into account the characteristics of fluid inside the fracture, which is very important while conducting the seismic geological surveys. In this work, we developed the algorithm for computing the medium parameters on the border of a fracture, described by the model of Schoenberg, using the grid-characteristic method. We present the results of application of the developed algorithm to the solution of the problem of seismic monitoring of the hydraulic fracture, where the fracture filling fluid is a necessary part of investigation.

Keywords: fracture models, seismology, grid-characteristic method, hydraulic fracturing