

УДК 517.93

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ БРАУЭРА–ПАУЛЯ

© 2021 г. А. П. Иванов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 15.09.2021 г.

Поступило 16.09.2021 г.

После доработки 16.11.2021 г.

Принято к публикации 17.11.2021 г.

Задача об устойчивости равновесия тяжелой частицы в стационарной точке вращающейся поверхности впервые была рассмотрена известным голландским математиком Брауэром в 1918 г. Им было показано, что в случае гладкой поверхности седловая точка, неустойчивая в отсутствие вращения, может быть стабилизирована в некотором диапазоне угловых скоростей. Эта система была рассмотрена Боттема с позиций теории бифуркаций. Физический аналог этой задачи — ионная ловушка Нобелевского лауреата Пауля: здесь вращающаяся твердая опора заменяется квадруполом с периодически меняющимся напряжением, а сила тяжести — электростатическим полем. Условия устойчивости были получены в линейном приближении, а их достаточность до сих пор не доказана. В данной работе такое доказательство проводится методами гамильтоновой механики.

Ключевые слова: шар на вращающемся седле, устойчивость, теория КАМ

DOI: 10.31857/S2686954321060084

1. ВЫВОД ГАМИЛЬТониАНА

Будем считать массу частицы единичной, поверхность вращается как твердое тело вокруг фиксированной вертикали OZ с постоянной угловой скоростью $\omega \neq 0$. Свяжем с поверхностью систему координат $OXYZ$ с началом в критической точке. Положение частицы — x, y . Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности, тогда для функции Лагранжа имеем выражение

$$\begin{aligned} L &= T - gf(x, y), \\ T &= \frac{1}{2}((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + u^2), \\ u &= f_x \dot{x} + f_y \dot{y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где g — ускорение свободного падения. Выберем единицы измерения длины и времени так, чтобы $\omega = 1$, $g = 1$. Первый дифференциал функции f в начале координат обращается в нуль, а второй дифференциал считаем невырожденным. Не ограничивая общности, направим оси OX и OY вдоль главных направлений, тогда

$$d^2 f = \frac{1}{2}(\alpha dx^2 + \beta dy^2), \quad \alpha\beta \neq 0. \quad (2)$$

Обобщенные импульсы определены формулами

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y + uf_x, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x + uf_y. \quad (3)$$

Функцию Гамильтона строим как преобразование Лежандра лагранжиана (1):

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = f(x, y) + \\ &+ p_x(p_x + y - \hat{u}f_x) + p_y(p_y - x - \hat{u}f_y) - \\ &- \frac{1}{2}((p_x - \hat{u}f_x)^2 + (p_y - \hat{u}f_y)^2 + \hat{u}^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь символом $\hat{u}$ обозначена величина u , выраженная через канонические переменные.

Для решения вопроса об устойчивости тривиального равновесия системы разложим функцию (4) по формуле Тейлора (величина $\hat{u}$ имеет второй порядок малости):

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots,$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x, \quad (5)$$

$$H_3 = d^3 f,$$

$$H_4 = d^4 f - \frac{1}{2}(\alpha x(p_x + y) + \beta y(p_y - x))^2.$$

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия

² Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, Москва, Россия

*E-mail: a-p-ivanov@inbox.ru

2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Первый этап — определение необходимых условий устойчивости из анализа формы H_2 . Для матрицы ли- неаризованной системы $\dot{\xi} = A\xi$, $\xi = (x, y, p_x, p_y)^T$ име- ем такое выражение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^4 + (\alpha + \beta + 2)\lambda^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta) = 0. \quad (7)$$

Корни уравнения (7) чисто мнимы при выполнении системы неравенств

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2 &> 0, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0, \\ D = (\alpha - \beta)^2 + 8(\alpha + \beta) &> 0. \end{aligned} \quad (8)$$

3. СЛУЧАЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Допустим, что поверхность имеет второй по- рядок:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2), \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0. \quad (9)$$

Неравенства (8) выполнены для значений $\beta \in (-2 - \alpha, 1)$. Данный интервал непуст, если $\alpha > -3$, что и предполагается ниже. Согласно тео- рии гамильтоновых систем, существует веще- ственное линейное каноническое преобразова- ние [1–4]:

$$L: (x, y, p_x, p_y) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2),$$

приводящее H_2 к нормальной форме

$$H_2^* = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2), \quad (10)$$

где ω_1, ω_2 — мнимые части корней уравнения (7). Различие знаков при слагаемых в формуле (10) обу- словлено тем, что при сделанных предположениях форма H_2 в формулах (5) знакопеременна.

Важное свойство разложения (5) в рассматри- ваемом случае: $H_3 \equiv 0$, $H_4 \leq 0$. Это позволяет до- казать следующее

Предложение 1. При выполнении условий (8), (9) положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Перейдем от перемен- ных (q_1, q_2, p_1, p_2) к каноническим полярным коор- динатам (r_j, φ_j) по формулам

$$q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j, \quad j = 1, 2.$$

В новых переменных

$$\begin{aligned} H_2^* &= \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2, \quad H_3^* = 0, \quad H_4^* = -\hat{u}^2, \\ \hat{u} &= \alpha x(p_x + y) + \beta y(p_y - x), \end{aligned} \quad (11)$$

причем старые переменные выражены через но- вые. Разложим H_4^* :

$$H_4^* = Q(r_1, r_2) + F(r_j, \varphi_j), \quad \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} F d\varphi_2 = 0. \quad (12)$$

Функция (12) неположительна при выполнении одного из двух условий: либо $Q(r_1, r_2) < 0$, либо $Q(r_1, r_2) \leq 0$, $F \equiv 0$. В первом случае вывод об устойчивости следует из теоремы Арнольда–Мо- зера [4], так как Q представляет собой нормаль- ную форму в случае отсутствия резонансов до чет- вертого порядка включительно. Наличие резо- нанса третьего порядка не влияет на вид этой формы, так как $H_3 \equiv 0$. Если же имеет место резо- нанс четвертого порядка, то устойчивость следует из результатов Маркеева [5].

Во втором случае

$$\frac{\partial H_4^*}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial H_4^*}{\partial \varphi_2} \equiv 0,$$

откуда ввиду (11) получаем, что функция $\hat{u}$ не за- висит от угловых переменных. Допустим, что условие теоремы Арнольда–Мозера о несовмест- ности системы $H_2^* = 0$, $Q = 0$ не выполнено. Это означало бы, что $\hat{u}$ пропорционально H_2^* с неко- торым числовым множителем. Такое свойство должно было бы сохраняться и в исходных пере- менных. Сравнивая выражения для этих функций, заметим, что $\hat{u} = 0$ при $x = y = 0$ и любых $\dot{x}, \dot{y}$, а ве- личина H_2^* при этом положительна. Полученное противоречие завершает доказательство.

4. ВЛИЯНИЕ НЕСОВЕРШЕНСТВА ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

На практике, построить поверхность, идеаль- но имеющую форму (9), нереально. При этом да- же незаметные отклонения в самой функции $f(x, y)$ и ее первом и втором дифференциале мо- гут привести к значительному изменению произ- водных третьего и четвертого порядков. В этом случае источником неустойчивости являются це- лочисленные соотношения вида

$$k_1 \omega_1 - k_2 \omega_2 = 0, \quad k_1 + k_2 \leq 4, \quad k_{1,2} \in N. \quad (13)$$

Разрешая биквадратное уравнение (7), находим

$$\lambda^4 + (\alpha + \beta + 2)\lambda^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta) = 0,$$

$$\lambda_{1,2}^2 = -1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{D},$$

$$D = (\alpha - \beta)^2 + 8(\alpha + \beta).$$

Следовательно,

$$\omega_1^2 = 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{D}, \quad \omega_2^2 = 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{D}, \quad (14)$$

а) резонанс третьего порядка: $\omega_1^2 = 4\omega_2^2$. Согласно формулам (14), этот случай реализуется при условии

$$10\sqrt{D} = 6 + 3(\alpha + \beta). \quad (15)$$

Предложение 2. Если $d^3 f(x, y) \neq 0$, то для почти всех значений производных третьего порядка функции $f(x, y)$ в нуле и значений параметров, удовлетворяющих равенству (15), положение равновесия неустойчиво.

Данный результат следует из теоремы Маркеева [5].

б) резонанс четвертого порядка: $\omega_1^2 = 9\omega_2^2$. Этот случай реализуется при условии

$$5\sqrt{D} = 4 + 2(\alpha + \beta). \quad (16)$$

Предложение 3. Если $d^4 f(x, y) \neq 0$, то в пространстве значений производных четвертого порядка функции $f(x, y)$ в нуле и значений параметров, удовлетворяющих равенству (16), области устойчивости и неустойчивости имеют ненулевую меру.

Уместность вероятностной формулировки обусловлена наличием погрешностей в форме поверхности $f(x, y)$, не поддающихся строгому учету. Устойчивость имеет место при выполнении некоторого неравенства, связывающего коэффициенты нормальной формы [4], иначе равновесие неустойчиво. Сформулированное утверждение означает, что нет оснований считать один из знаков этого неравенства более вероятным, чем другой.

Геометрическая иллюстрация предложений 1–3 приведена на рис. 1. Область (8) – криволинейный треугольник, ограниченный нижней кривой. Выше границы располагаются линии резонансов третьего и четвертого порядков (перечислены снизу вверх).

Предложение 4. Если в области устойчивости в первом приближении (8) не выполнено ни одно из равенств (15) или (16), то в пространстве значений производных третьего и четвертого порядка функции $f(x, y)$ в нуле область неустойчивости имеет нулевую меру.

Данный вывод следует из вышеупомянутой теоремы Арнольда–Мозера.

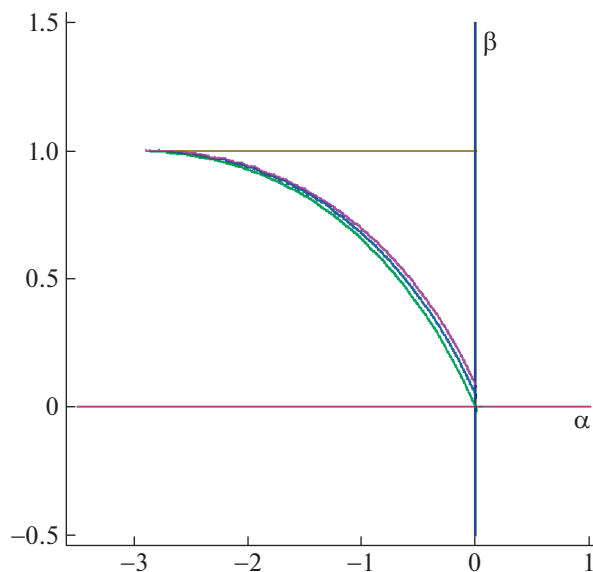


Рис. 1. Область устойчивости частицы.

5. СЛУЧАЙ ШАРИКА НЕНУЛЕВОГО РАДИУСА

Заменим в постановке задачи частицу шариком малого радиуса $\rho > 0$. В отсутствие трения реакция не создает момента относительно центра тела, поэтому его угловая скорость не изменяется со временем. Для решения вопроса об устойчивости можно воспользоваться полученными выше результатами, но с существенной поправкой: если точка контакта лежит на поверхности $z = f(x, y)$, то его центр движется по эквидистанте. Для построения последней необходимо в каждой точке исходной поверхности построить нормаль γ (с ориентацией вверх) и отложить вдоль нее отрезок, равный радиусу ρ . Для координат центра шара (x', y', z') имеем выражение

$$(x', y', z') = (x, y, z) + \rho \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}. \quad (17)$$

Формула (17) неявно задает уравнение эквидистанты $z' = g(x', y')$. Задача о движении шарика динамически эквивалентна задаче о движении частицы той же массы по этой поверхности. Будем считать, что опора является параболоидом (9) и найдем первые члены разложения функции g .

Поскольку

$$\begin{aligned} (x', y', z') &= (x, y, z) + \rho \frac{(-\alpha x, -\beta y, 1)}{\sqrt{1 + \delta}} = \\ &= (x, y, z) + \rho(-\alpha x, -\beta y, 1) \left(1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \dots \right), \\ \delta &= (\alpha x)^2 + (\beta y)^2, \end{aligned}$$

то имеем

$$\begin{aligned}
 x' &= (1 - \alpha\rho)x + \frac{1}{2}\alpha\delta\rho x + \dots, \\
 y' &= (1 - \beta\rho)y + \frac{1}{2}\beta\delta\rho y + \dots, \\
 z' &= \rho + z + \rho\left(-\frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \dots\right).
 \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, эквидистанта не имеет особых точек при условии $\beta\rho < 1$, которое ограничивает радиус шарика в данном анализе (напомним, что в рассматриваемом случае $\alpha < 0$). Разрешая соотношения (18) относительно x , y , получим уравнение для поверхности, по которой движется центр, в виде

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x'}{(1 - \alpha\rho)}\left(1 - \frac{\alpha'\rho\delta'}{2}\right) + \dots, \\
 y &= \frac{y'}{(1 - \beta\rho)}\left(1 - \frac{\beta'\rho\delta'}{2}\right) + \dots, \\
 g_2 &= \frac{1}{2}(\alpha'x'^2 + \beta'y'^2), \quad g_4 = \frac{1}{8}\rho(\delta')^2, \\
 \delta' &= (\alpha'x')^2 + (\beta'y')^2, \\
 \alpha' &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\rho}, \quad \beta' = \frac{\beta}{1 - \beta\rho}.
 \end{aligned} \quad (19)$$

При сделанных оговорках начало координат является седловой точкой для эквидистанты, но, в отличие от случая точечной массы, в ее степенном разложении имеются члены четвертого порядка. Поэтому в разложении (5) функция H_4 знакопеременна. Необ-

ходимые условия устойчивости выражаются неравенствами (8), где вместо α, β нужно подставить α', β' по формулам (19). Геометрически область устойчивости подвергается дробно-линейному преобразованию: если считать, что на фигуре она изображена в переменных α', β' , то для перехода к исходным переменным, описывающим форму опорного параболоида, ее следует растянуть по оси абсцисс и сжать по оси ординат.

Для вывода об устойчивости используется предложение 4.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-30012)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brouwer L.E.J.* The motion of a particle on the bottom of a rotating vessel under the influence of the gravitational force / in: H. Freudenthal (ed.). *Collected Works*. II. North-Holland, Amsterdam, 1975. P. 665–686.
2. *Bottema O.* Stability of equilibrium of a heavy particle on a rotating surface // *ZAMP Z. angew. Math. Phys.* 1976. V. 27. P. 663–669.
3. *Пауль В.* Электромагнитные ловушки для заряженных и нейтральных частиц // *УФН*. 1990. Т. 160. Вып. 12.
4. *Arnol'd V.I.* *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1978.
5. *Markeev A.P.* Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance // *Appl. Math. Mech.* 1969. V. 32. P. 766–772.

PROOF OF STABILITY IN THE BROWER-PAUL PROBLEM

A. P. Ivanov^{a,b}

^a *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We study stability of equilibrium in the problem known as “a ball on a rotating saddle”, which was first considered by the famous Dutch mathematician Brauer in 1918. He showed that in the case of a smooth surface, the saddle point, unstable in the absence of rotation, can be stabilized in a certain range of angular velocities. Later, this system was considered by Bottema from the standpoint of the theory of bifurcations. The physical analogue of this problem is the Nobel Laureate Paul’s ion trap: here a rotating solid support is replaced by a quadrupole with a periodically changing voltage, and gravity is replaced by an electrostatic field. The stability conditions were obtained in a linear approximation, and their sufficiency has not yet been proven. In this paper, such a proof is carried out by methods of Hamiltonian mechanics.

Keywords: ball on a rotating saddle, stability, KAM theory