

УДК 517.9

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ОТ ЧИСЛА ОСЦИЛЛЯТОРОВ

© 2021 г. А. А. Кашченко^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 15.07.2021 г.

Поступило 19.09.2021 г.

После доработки 10.11.2021 г.

Принято к публикации 11.11.2021 г.

Изучается нелокальная динамика модели, описывающей N связанных осцилляторов с запаздыванием. Изучение асимптотики решений исходной системы сводится к изучению более простого отображения. Показано, что при положительных значениях параметра связи в рассматриваемой модели осцилляторы синхронизируются. При отрицательных значениях параметра связи асимптотика решений системы существенно зависит от четности числа N : при четных N наблюдается двухкластерная синхронизация, а при нечетных N динамика модели более сложная.

Ключевые слова: нелокальная динамика, запаздывание, асимптотика

DOI: 10.31857/S2686954321060096

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение с запаздыванием и финитной нелинейностью

$$\dot{u} = -\nu u + \lambda F(u(t-T)) \quad (1)$$

является математической моделью генератора с нелинейной запаздывающей обратной связью с RC-фильтром нижних частот первого порядка [1] и описывает многие биологические процессы, в которых переменная состояния u распадается со скоростью, пропорциональной u в настоящее время, и создается со скоростью, зависящей от значения u некоторое время в прошлом [2]. Кроме того, модели с финитной нелинейностью представляют общенаучный интерес [3–7].

В работах [8–10] изучалась асимптотика решений двух связанных генераторов вида (1)

$$\dot{u}_1 + u_1 = \lambda F(u_1(t-T)) + \gamma(u_2 - u_1),$$

$$\dot{u}_2 + u_2 = \lambda F(u_2(t-T)) + \gamma(u_1 - u_2)$$

в предположении $\lambda \gg 1$ при различных величинах связи между осцилляторами γ . В них показано, что при $\gamma > 0$, начиная с некоторого момента времени, осцилляторы синхронизируются, при асимптотически малых по λ значениях γ сосуществуют различные устойчивые неоднородные ре-

лаксационные циклы, а при $-\frac{1}{2} < \gamma < 0$ найдены синхронные неоднородные режимы.

Мы рассмотрим систему, описывающую N ($N \geq 4$) связанных осцилляторов вида (1):

$$\dot{u}_j + u_j = \lambda F(u_j(t-T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}),$$
$$j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$u_0 \equiv u_N, \quad u_{N+1} \equiv u_1.$$

Здесь u_j ($j = 1, 2, \dots, N$) – скалярные переменные, параметры λ и T положительные, γ отлична от нуля и такова, что $\gamma > -\frac{1}{4}$ (это условие необходимо для диссипативности системы (2)), а ограниченная нелинейная кусочно-гладкая функция F вне отрезка $[-p, p]$ (где p – некоторая положительная константа) тождественно равна нулю. Кроме того, от функции $F(u)$ на отрезке $u \in [-p, p]$ мы требуем выполнения условий

$$F(u) \neq 0 \text{ за исключением конечного}$$

числа точек,

$$\text{если } F(u_*) = 0, \text{ то существует } n \in \mathbb{N} \text{ такое,} \quad (3)$$

$$\text{что } F^{(n)}(u_*) \neq 0.$$

Также предполагаем, что параметр λ является достаточно большим: $\lambda \gg 1$.

В этой работе мы будем строить асимптотику релаксационных решений модели (2) при условиях (3), $\lambda \gg 1$ для ненулевых значений параметра γ

¹ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

для всех начальных условий из некоторого множества S .

Изучение нелокальной динамики модели (2) при условии $\lambda \gg 1$ будет проводиться методом большого параметра [11]. Вначале будет выбрано множество начальных условий S . Для всех начальных условий из этого множества будет построена асимптотика решений при $\lambda \rightarrow +\infty$, далее будет построен оператор сдвига по траекториям, переводящий множество начальных условий в множество такого же типа, и найдены главные части этого оператора при положительных и отрицательных значениях параметра γ (они будут иметь вид конечномерных отображений). По динамике этих отображений будет сделан вывод о динамике исходной модели.

1. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ

Запишем систему (2) в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dots \\ \dot{u}_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F(u_1(t-T)) \\ \dots \\ F(u_N(t-T)) \end{pmatrix} + \mathbb{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2\gamma-1 & \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma \\ \gamma & -2\gamma-1 & \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & -2\gamma-1 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma & -2\gamma-1 & \gamma \\ \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma & -2\gamma-1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим линейную часть системы (4) – систему

$$\dot{u} = \mathbb{A}u, \quad (6)$$

где $u = (u_1, \dots, u_N)^T$.

Ее решение имеет вид

$$u(t) = e^{\mathbb{A}(t-\tau)} u(\tau). \quad (7)$$

Рассмотрим отрезок $[t_1 - T, t_1]$ и введем на нем множество начальных условий для системы (4). Обозначим это множество через $S(x_1, \dots, x_N)$. В $S(x_1, \dots, x_N)$ содержатся вектора $(u_1(s), \dots, u_N(s))$ непрерывных на отрезке $s \in [t_1 - T, t_1]$ функций таких, что:

$$|u_j(s)| \geq p \quad \text{при} \quad s \in [t_1 - T, t_1], \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, N,$$

$$u_j(t_1) = x_j p, \quad |x_j| \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (9)$$

$$\exists i \in \{1, \dots, N\} : |x_i| = 1,$$

при этом существует такая положительная константа δ , что при $t \in (t_1, t_1 + \delta)$ выполняется неравенство $|u_i(t)| < p$. Заметим, что это множество непусто и невыпукло.

Построим асимптотику всех решений системы (4) с начальными условиями из множества $S(x_1, \dots, x_N)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Будем интегрировать систему (4) методом шагов.

Пусть $t \in [t_1, t_1 + T]$. На рассматриваемом отрезке система (4) принимает вид (6), и ее решение имеет вид (7), где $\tau = t_1$, $u(t_1) = (x_1 p, \dots, x_N p)^T$.

Пусть $t \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$, тогда функции $F(u_j(t-T))$ ($j = 1, \dots, N$) известны с прошлого шага, поэтому на рассматриваемом временном отрезке будем считать их неоднородностью в системе (4). Тогда получаем, что решение системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbb{A}(t-t_1)} \begin{pmatrix} x_1 p \\ \dots \\ x_N p \end{pmatrix} + \lambda \mathbb{G}(t_1 + T, t), \quad (10)$$

где

$$\mathbb{G}(t_{\min}, t) = \begin{pmatrix} g_1(t_{\min}, t, x_1, \dots, x_N) \\ \dots \\ g_N(t_{\min}, t, x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix} = \int_{t_{\min}}^t e^{\mathbb{A}(t-s)} \begin{pmatrix} F(u_1(s-T)) \\ \dots \\ F(u_N(s-T)) \end{pmatrix} ds.$$

Пусть выполняется следующее утверждение.

Предположение 1. Для каждого r ($r = 1, \dots, N$) верно $g_r(t_1 + T, t_1 + 2T, x_1, \dots, x_N) \neq 0$, и количество точек $t^* \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$, при которых $g_r(t_1 + T, t^*, x_1, \dots, x_N) = 0$, конечно. Для каждой точки t^* такой, что $g_r(t_1 + T, t^*, x_1, \dots, x_N) = 0$, существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left. \frac{\partial^j g_r(t_1 + T, t, x_1, \dots, x_N)}{\partial t^j} \right|_{t=t^*} \neq 0.$$

Тогда в предположении 1 при достаточно больших $\lambda > 0$ в точке $t = t_1 + 2T$ верно равенство

$$u(t_1 + 2T) = \lambda(\mathbb{G}(t_1 + T, t_1 + 2T) + o(1)). \quad (11)$$

Для решений системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ верен следующий результат.

Л е м м а 1. При выполнении предположения 1 на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ асимптотика решения системы (4) при достаточно больших $\lambda > 0$ будет иметь вид

$$u(t) = \lambda(e^{\mathbb{A}(t-t_1-2T)} + o(1))\mathbb{G}(t_1 + T, t_1 + 2T). \quad (12)$$

Формула (12) верна потому, что при условии выполнения предположения 1 главную часть асимптотики решения модели (4) задает решение линейной задачи (6) с начальными условиями (11), а нелинейность дает вклад, имеющий порядок $o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Обозначим собственные значения матрицы $\mathbb{A}$ как σ_k , а соответствующие им собственные вектора как a_k . Приведем явный вид σ_k и a_k :

$$\sigma_k = -1 - 4\gamma \sin^2 \frac{\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$a_k = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{1 \cdot 2\pi k}{N}\right), \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi k}{N}\right), \dots, \cos\left(\frac{N \cdot 2\pi k}{N}\right) \right), & 1 \leq k \leq \left[\frac{N}{2}\right], \\ \left(\cos\left(\frac{0 \cdot 2\pi k}{N}\right), \cos\left(\frac{1 \cdot 2\pi k}{N}\right), \dots, \cos\left(\frac{(N-1) \cdot 2\pi k}{N}\right) \right), & \left[\frac{N}{2}\right] + 1 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (14)$$

где $[\cdot]$ обозначает взятие целой части числа.

Заметим, что для всех N выполняются равенства $\sigma_N = -1$, $a_N = (1, 1, \dots, 1)$. При четных $N = 2m$ верно $\sigma_k = \sigma_{N-k}$ при $k = 1, \dots, m-1$, значение σ_m равняется $-1 - 4\gamma$, а соответствующий ему собственный вектор имеет вид $a_m = (-1, 1, \dots, -1, 1)$. При нечетных $N = 2m-1$ равенство $\sigma_k = \sigma_{N-k}$ также выполняется при $k = 1, \dots, m-1$.

Выпишем решение системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ в другом виде:

$$u(t) = \lambda \left(\sum_{k=1}^N (z_k^1 a_k + o(1)) e^{\sigma_k(t-t_1-2T)} \right). \quad (15)$$

Здесь $z_k^1 = (\mathbb{G}(t_1 + T, t_1 + 2T), b_k)$, где $\mathbb{A}^* b_k = \sigma_k b_k$, $(a_k, b_k) = 1$, $(a_k, b_{n-k}) = 0$ (если $k \neq n-k$).

Пусть выполняются условия невырожденности:

$$\begin{aligned} z_N^1 &\neq 0, & \text{если } \gamma > 0, \\ z_m^1 &\neq 0, & \text{если } -\frac{1}{4} < \gamma < 0, \quad N = 2m, \\ \prod_{i=1}^N (z_{m-1}^1 a_{m-1}^i + z_m^1 a_m^i) &\neq 0, \\ \text{если } -\frac{1}{4} < \gamma < 0, & \quad N = 2m-1, \end{aligned} \quad (16)$$

где a_{m-1}^i и a_m^i — i -е координаты векторов a_{m-1} и a_m . Тогда из формулы (15) следует, что при $t > t_1 + 3T$ решение системы (4) будет иметь вид (12) до тех пор, пока одна (или несколько) функций u_i не упадет впервые внутрь полосы $|u_i| \leq p$ в точке $t = t_2 > t_1 + 3T$ такой, что $|\dot{u}_i| = O(1)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Для t_2 выполняются следующие соотношения:

$$t_2 - t_1 = \begin{cases} (1 + o(1)) \ln \lambda, & \gamma > 0, \\ ((1 + 4\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda, \\ -\frac{1}{4} < \gamma < 0, & N = 2m, \\ \left(\left(1 + 4\gamma \sin^2 \frac{\pi m}{2m-1} \right)^{-1} + o(1) \right) \ln \lambda, \\ -\frac{1}{4} < \gamma < 0, & N = 2m-1, \end{cases} \quad (17)$$

$$|u_j(s + t_2)| > p \quad (j = 1, \dots, N), \quad s \in [-T, 0), \quad (18)$$

$$|u_j(t_2)| = \bar{x}_j p, \quad |\bar{x}_j| \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (19)$$

$$\exists i : |\bar{x}_i| = 1.$$

Из формул (8), (9) и (18), (19), легко видеть, что в точке t_2 мы вернулись к исходной ситуации, поскольку решение снова принадлежит множеству S (но с другими значениями параметров). Следовательно, существует оператор последования, переводящий множество начальных условий $S(x_1, \dots, x_N)$ в множество $S(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$. Если, начиная с точки $t = t_2$, проделать все построения, описанные выше, и при этом выполняются условия предположения 1 с заменой t_1 на t_2 и при новых значениях параметров x_i , то мы получим асимптотику решения системы (4) на отрезке $[t_2, t_3]$, потом на отрезке $[t_3, t_4]$ и так далее. Таким образом с помощью оператора последования можно получить отображение на параметры $x_1^n, \dots, x_N^n$, где $n = 2, 3, \dots$. По динамике этого отображения мы можем судить о динамике исходной задачи, поскольку параметры x_i^n ($i = 1, \dots, N$) определяют решение системы (4).

2. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИНАМИКА ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы построим отображения на параметры $(x_1^n, \dots, x_N^n)$ для положительных и отрицательных значений параметра связи γ и на основе их динамики сделаем вывод о динамике исходной системы.

Рассмотрим сначала случай $\gamma > 0$. Будем действовать, как описано в разделе 1. Пусть на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ выполнялось предположение 1 для значений $x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i$ и t_i , а также неравенства

$$z_N^i \neq 0, \quad (20)$$

где значение z_N^i получаем из z_N^1 заменой t_1 на t_i : $z_N^i = (\mathbb{G}(t_i + T, t_i + 2T), b_N)$.

При выполнении этих предположений при положительной связи между осцилляторами для значений $u_j(t_{n+1})$ выполняются соотношения

$$u_j(t_{n+1}) = \lambda(z_N^n + o(1))e^{-(t_{n+1}-2T-t_n)}, \\ j = 1, \dots, N.$$

Следовательно, при $\gamma > 0$ для значений t_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) имеем

$$t_{n+1} - t_n = (1 + o(1)) \ln \lambda \quad (21)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Из асимптотики решения мы получаем главную часть значений параметров x_i^{n+1} :

$$x_i^{n+1} = \text{sign}(z_N^n) + o(1). \quad (22)$$

Заметим, что, согласно определению множества начальных условий, модуль хотя бы одной из величин x_i^{n+1} в точности равен единице, а остальные модули больше или равны единице. Кроме того, из формулы (22) следует, что при всех $n \geq 2$ верно $x_i^n = x_i^n + o(1)$ ($i = 2, \dots, N$).

Введем в рассмотрение функцию

$$d(\tilde{t}, k) = \int_T^{\tilde{t}} e^{s-\tilde{t}} F(kpe^{T-s}) ds,$$

где параметр k принимает одно из двух значений: 1 или -1 .

Приведем формулировку утверждения, гарантирующего выполнение предположения 1 и неравенства (20) при положительных значениях параметра γ при всех $n \geq 2$.

Предположение 2. Верно неравенство $d(2T, k) \neq 0$, и количество точек $\tilde{t}^* \in [T, 2T)$, при которых $d(\tilde{t}^*, k) = 0$, конечно. Для каждой точки $\tilde{t}^*$ такой, что $d(\tilde{t}^*, k) = 0$, существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{\partial^j d(\tilde{t}, k)}{\partial \tilde{t}^j} \Big|_{\tilde{t}=\tilde{t}^*} \neq 0.$$

Из построений, приведенных выше, вытекает следующая

Теорема 1. Пусть $\gamma > 0$ и для начальных значений $x_1^1, \dots, x_N^1$ выполнено предположение 1 и нера-

венство (16). Пусть выполнено предположение 2. Тогда для каждого достаточно большого λ существует такое положительное значение t_2 , зависящее от $(x_1^1, \dots, x_N^1)^T$, что при $t > t_2$ все компоненты решения уравнения (4) будут иметь одинаковую главную часть асимптотики.

Таким образом, с некоторого момента времени все решения синхронизируются.

Теперь перейдем к рассмотрению случая отрицательных значений параметра γ . Заметим, что в силу строения спектра матрицы A в случае отрицательных значений параметра связи γ выделяются два принципиально различных случая: количество осцилляторов N четно ($N = 2m$) и количество осцилляторов N нечетно ($N = 2m - 1$).

Пусть N четно ($N = 2m$). Тогда при условии выполнения на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ предположения 1 для значений $x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i$ и t_i , а также неравенства

$$z_m^i \neq 0, \quad (23)$$

где $z_m^i = (\mathbb{G}(t_i + T, t_i + 2T), b_m)$, для значений $u_j(t_{n+1})$ выполняются соотношения

$$u_j(t_{n+1}) = \lambda((-1)^j z_m^n + o(1))e^{(-1-4\gamma)(t_{n+1}-2T-t_n)}, \\ j = 1, \dots, N.$$

Отсюда следует, что при $n \geq 1$ выполняются равенства

$$t_{n+1} - t_n = ((1 + 4\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda \quad (24)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$x_j^{n+1} = (-1)^j \text{sign}(z_m^n) + o(1). \quad (25)$$

Из равенства (25) следует, что при $n \geq 1$ все x_j^{n+1} с четными индексами j и x_j^{n+1} с нечетными индексами j асимптотически близки между собой.

Из построений, приведенных выше, и симметричности исходной системы уравнений вытекает следующая.

Теорема 2. Пусть $-\frac{1}{4} < \gamma < 0$ и N четно ($N = 2m$). Пусть для $i = 1, 2, \dots, q$ выполнено предположение 1 и неравенство (23). Тогда для каждого достаточно большого λ на отрезке $t \in [t_2, t_q]$ все компоненты решения уравнения (4) с четными номерами будут иметь одинаковую главную часть асимптотики, и все компоненты решения с нечетными номерами тоже будут иметь одинаковую (другую) главную часть асимптотики.

Из теоремы следует, что наблюдается двухкластерная синхронизация.

Теперь рассмотрим случай нечетного числа N осцилляторов ($N = 2m - 1$).

В этом случае при условии выполнения на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ предположения 1 для значений $x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i$ и t_i , а также неравенства

$$\prod_{j=1}^N (z_{m-1}^i a_{m-1}^j + z_m^i a_m^j) \neq 0, \quad (26)$$

где $z_j^i = (\mathbb{G}(t_i + T, t_i + 2T), b_i)$, компоненты решения u_j ($j = 1, \dots, N$) в точке t_{n+1} принимают вид

$$u_j(t_{n+1}) = \lambda(z_{m-1}^n a_{m-1}^j + z_m^n a_m^j + o(1)) \times e^{\left(-1-4\gamma \sin^2 \frac{\pi m}{2m-1}\right)(t_{n+1}-2T-t_n)}.$$

Отсюда получаем

$$t_{n+1} - t_n = \left(\left(1 + 4\gamma \sin^2 \frac{\pi m}{2m-1} \right)^{-1} + o(1) \right) \ln \lambda \quad (27)$$

и

$$x_j^{n+1} = \frac{1}{w_n} (z_{m-1}^n a_{m-1}^j + z_m^n a_m^j + o(1)), \quad (28)$$

где

$$w_n = \min_{j \in \{1, \dots, N\}} |z_{m-1}^n a_{m-1}^j + z_m^n a_m^j|. \quad (29)$$

На следующем отрезке $t \in [t_{n+1}, t_{n+2}]$ мы по значениям x_j^{n+1} найдем новые значения z_{m-1}^{n+1} и z_m^{n+1} , которые, согласно формуле (28), будут выражаться как линейная комбинация величин z_{m-1}^n и z_m^n . Таким образом, мы получим значения величин x_j^{i+1} ($j = 1, 2, \dots, N$) в виде линейной комбинации величин $z_{m-1}^i, z_m^i, i = 1, 2, \dots$, и двумерное отображение, связывающее величины z_{m-1}^{i+1}, z_m^{i+1} с величинами z_{m-1}^i, z_m^i .

Из построений, приведенных выше, получается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $-\frac{1}{4} < \gamma < 0$ и N нечетно ($N = 2m - 1$). Пусть для $i = 1, 2, \dots, q$ выполнено предположение 1 и неравенство (26). Тогда при всех достаточно больших λ параметры x_j^{n+1} ($j = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, q$) находятся асимптотически близко к двумерному подпространству, являющемуся линейной оболочкой векторов a_{m-1} и a_m , а точные их значения определяются по формуле (28).

ВЫВОДЫ

В работе исследована динамика модели, описывающей N связанных осцилляторов с запазды-

ванием. Построены асимптотика решений с начальными условиями из множества S и конечномерные отображения, помогающие уточнить значения параметров, фигурирующих в формулах для асимптотики решения. Доказано, что при положительных значениях параметра γ , начиная с некоторого момента времени, все осцилляторы синхронизируются. В случае отрицательной связи между осцилляторами $-\frac{1}{4} < \gamma < 0$ и четного числа осцилляторов показано, что синхронизируются все осцилляторы с четными номерами и все осцилляторы с нечетными номерами; а в случае нечетного числа осцилляторов показано, что при каждом $n = 1, 2, \dots, q$ все N параметров x_j^{n+1} ($j = 1, 2, \dots, N$) находятся вблизи одного и того же двумерного подпространства исходного N -мерного пространства.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kiliyas T., Kelber K., Mogel A., Schwarz W. Electronic chaos generators — design and applications // International journal of electronics. 1995. V. 79. № 6. P. 737–753.
2. an der Heiden U., Mackey M.C. The dynamics of production and destruction: analytic insight into complex behavior // Journal of Mathematical Biology. 1982. V. 16. № 1. P. 75–101.
3. Erneux T. Applied delay differential equations. Springer Science & Business Media, 2009.
4. Lakshmanan M., Senthilkumar D.V. Dynamics of nonlinear time-delay systems. Springer Science & Business Media, 2011.
5. Krisztin T., Walther H.O. Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2001. V. 13. № 1. P. 1–57.
6. Stoffer D. Delay equations with rapidly oscillating stable periodic solutions // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2008. V. 20. № 1. P. 201–238.
7. Krisztin T., Vas G. Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback // Journal of dynamics and differential equations. 2011. V. 23. № 4. P. 727–790.
8. Кащенко А.А. Релаксационные циклы в модели двух слабо связанных осцилляторов со знакопеременной запаздывающей обратной связью // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 3. С. 437–446.
9. Kashchenko A.A. Dependence of Dynamics of a System of Two Coupled Generators with Delayed Feedback on

- the Sign of Coupling // Mathematics. 2020. V. 8. № 10. P. 1790.
10. *Kashchenko A.A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 93. P. 105488.
11. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Кн. дом “Либроком”, 2009.

DEPENDENCE OF THE DYNAMICS OF THE MODEL OF COUPLED OSCILLATORS ON THE NUMBER OF OSCILLATORS

A. A. Kashchenko^a

^a *Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper we study the nonlocal dynamics of a model describing N coupled oscillators with delay. Studying the asymptotics of solutions of the original system is reduced to studying the dynamics of a simpler mapping. It is shown that for positive values of the coupling parameter in the considered model, the oscillators are synchronized. For negative values of the coupling parameter, the asymptotics of the solutions of the system essentially depends on the parity of the number N : for even N , two-cluster synchronization is observed, and for odd N the dynamics of the model is more complicated.

Keywords: nonlocal dynamics, delay, asymptotics