

УДК 519.174, 519.179.1, 519.179.4

О СИЛЬНОМ ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

© 2022 г. Т. Г. Матвеева¹, А. Э. Хузиева², Д. А. Шабанов^{1,2,3,*}

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 09.11.2021 г.

Поступило 15.11.2021 г.

После доработки 15.11.2021 г.

Принято к публикации 20.12.2021 г.

Работа посвящена изучению пороговой вероятности для свойства наличия сильной раскраски в заданное число цветов у случайного k -однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, k, p)$. Раскраска множества вершин гиперграфа называется сильной, если в ней в каждом ребре не найдется двух вершин одинакового цвета. Исследуется вопрос о нахождении точной пороговой вероятности наличия сильной раскраски в q цветов у $H(n, k, p)$. В работе с помощью метода второго момента получены весьма точные оценки этой величины при условии, что q велико по отношению к k .

Ключевые слова: случайный гиперграф, раскраски гиперграфов, пороговые вероятности, сильное хроматическое число, метод второго момента

DOI: 10.31857/S268695432201009X

1. ВВЕДЕНИЕ И ИСТОРИЯ ЗАДАЧИ

В работе изучается проблема теории случайных гиперграфов, связанная с сильным хроматическим числом. Прежде чем обсуждать детали задачи, мы приведем ряд необходимых определений из теории гиперграфов.

В дискретной математике гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где V — это некоторое конечное множество, элементы которого называются вершинами гиперграфа, а E — это совокупность подмножеств множества вершин V , которые принято называются ребрами гиперграфа. Если каждое ребро гиперграфа состоит ровно из k вершин, то гиперграф называется k -однородным. Раскраска f множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в $q \in \mathbb{N}$ цветов — это отображение $f: V \rightarrow \{1, \dots, q\}$. Раскраска вершин гиперграфа называется сильной, если в ней две вершины раскрашены в разные цвета всегда, когда они вместе принадлежат некоторому общему ребру. Формально, раскраска f — сильная, если для любого ребра $A \in E$ и любых различных вершин

$u, v \in A$ выполнено $f(v) \neq f(u)$. Сильным хроматическим числом, $\chi_s(H)$, гиперграфа H называется такое наименьшее количество цветов q , что для H существует сильная раскраска вершин в q цветов. Отметим, что если H — это 2-однородный гиперграф, т.е. обычный граф без петель и кратных ребер, то для него понятие сильной раскраски совпадает с понятием обычной правильной раскраски, а сильное хроматическое число равняется хроматическому числу.

В настоящей работе исследуются сильные хроматические числа случайных гиперграфов в классической биномиальной модели $H(n, k, p)$. Случайный k -однородный гиперграф на n вершинах $H(n, k, p)$ представляет собой схему Бернулли на множестве ребер полного k -однородного гиперграфа $K_n^{(k)}$ на n вершинах: каждое ребро $K_n^{(k)}$ включается в $H(n, k, p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0, 1)$. В случае $k = 2$ случайный гиперграф $H(n, 2, p)$ есть в точности широко известная модель случайного графа $G(n, p)$, также называемой моделью Эрдеша–Реньи. В рамках работы мы считаем, что $k \geq 2$ фиксировано, $n \rightarrow +\infty$, а $p = p(n)$ есть некоторая функция от n . Перейдем к обсуждению известных результатов относительно $\chi_s(H(n, k, p))$.

Сильное хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ активно изучается с середины 80-х годов прошлого века. Первые результаты были найдены в работах Дж. Шмидт [1] и Э. Шамира [2], а наиболее общий результат об асимптотическом поведении $\chi_s(H(n, k, p))$ был получен

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: dmitry.shabanov@phystech.edu

М. Кривелевичем и Б. Судаковым в [3]. Обсудим последний результат более детально. Обозначим

$d = (k-1) \binom{n-1}{k-1} p$. Авторы [3] показали, что если d достаточно велико, но при этом $d = o(n)$, то

$$P\left(\frac{d}{2\ln(d)} \leq \chi_s(H(n, k, p)) \leq \frac{d}{2\ln(d)} \left(1 + \frac{1}{\ln^{0.1}(d)}\right)\right) \rightarrow 1. \quad (1)$$

Отметим, что результат (1) обобщает ранее известный результат Т. Лучака [4] для случайных графов. В случае, когда параметр d неограниченно растет, как функция от n , соотношение (1) дает асимптотику (закон больших чисел) сильного хроматического случайного гиперграфа $H(n, k, p)$. Если же d — это фиксированная величина, то мы получаем некоторые оценки $\chi_s(H(n, k, p))$, которое в этом случае с вероятностью, стремящейся к 1, будет ограничено. Целью настоящей работы является получение гораздо более сильных результатов в данной “разреженной” ситуации, т.е. в ситуации, когда среднее число ребер $H(n, k, p)$ линейно по числу вершину, что и соответствует фиксированному параметру d .

Исследования предельного распределения сильного хроматического числа случайного гиперграфа в разреженном случае тесно связаны с поиском точных пороговых вероятностей для свойств *сильное хроматическое число не превосходит q* . Напомним, что для заданного натурального числа $q \geq 3$ функция $\hat{p}_q = \hat{p}_q(n)$ называется точной пороговой для свойства *сильное хроматическое число не превосходит q* , если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, k, p)) \leq q) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leq (1 - \varepsilon)\hat{p}_q; \\ 0, & \text{если } p \geq (1 + \varepsilon)\hat{p}_q. \end{cases}$$

Существование точной пороговой вероятности для произвольного свойства, вообще говоря, не гарантировано. Но для изучаемого нами свойства наличия сильной раскраски в заданное число цветов оно следует из общего результата Х. Хатами и М. Моллоя [5] о существовании точных пороговых вероятностей для свойств, выражаемых в виде наличия гомоморфизма в заданный гиперграф.

Для изложения результатов о точных пороговых вероятностях удобно использовать следующую параметризацию. Положим $c = p \binom{n}{k} / n$, тогда в разреженном случае среднее число ребер линейно по n , $p \binom{n}{k} = cn$, и, значит, c не зависит от n . Оценки пороговых вероятностей наиболее на-

глядно и удобно формулировать как раз в виде ограничений на параметр c . Для сильных раскрасок $H(n, k, p)$ наиболее исследованным является, конечно, случай $k = 2$, случай графов. Здесь первые интересные результаты были получены в известной работе Д. Аклиоптаса и А. Наора [6]. Они, с одной стороны, показали, что при $c > q \ln q - \frac{1}{2} \ln q$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, 2, p)) > q) = 1,$$

а с другой, что при $c < (q-1) \ln(q-1)$ выполнено обратное

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, 2, p)) \leq q) = 1.$$

Тем самым, имеется лишь относительно небольшой зазор (порядка $\frac{1}{2} \ln q$ при больших q), в котором может находиться пороговое значение. В дальнейшем, данные оценки были заметно усилены в работах А. Койя-Оглана [7] и А. Койя-Оглана и Д. Виленчика [8]. Авторы [7] и [8] показали, что при $c > q \ln q - \frac{1}{2} \ln q - 1/2 + o_q(1)$ также верно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, 2, p)) > q) = 1,$$

но уже при $c < q \ln q - \frac{1}{2} \ln q - \ln 2 + o_q(1)$ выполнено обратное

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, 2, p)) \leq q) = 1.$$

Полученные оценки крайне близки, зазор составляет лишь ограниченную величину $\ln 2 - 1/2 + o(1)$. Отметим, что под $o_q(1)$ мы понимаем некоторую функцию от q , которая стремится к нулю с ростом q .

Сильные раскраски случайных гиперграфов изучены заметно хуже. Хорошо исследован только случай 3-однородных гиперграфов, для которых близкие оценки пороговых вероятностей были получены в работе А.Е. Балобанова и Д.А. Шабанова [9]. Ими была доказана следующая

Теорема 1 [9]. Пусть $p \binom{n}{3} = cn$, $c > 0$ не зависит от n .

1. Для фиксированного $q \geq 3$ если

$$c > \frac{-\ln q}{\ln\left(1 - \frac{3}{q} + \frac{2}{q^2}\right)} = \frac{q \ln q}{3} - \frac{5}{18} \ln q + O\left(\frac{\ln q}{q}\right), \quad (2)$$

то выполнено $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\chi_s\left(H\left(n, 3, cn/\binom{n}{3}\right)\right) > q\right) = 1$.

2. Существует такое q_0 , что при $q > q_0$ и

$$c < \frac{q \ln q}{3} - \frac{5}{18} \ln q - \frac{1}{3} - q^{-1/6}, \quad (3)$$

$$\text{выполнено } \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\chi_s\left(H\left(n, 3, cn/\binom{n}{3}\right)\right) \leq q\right) = 1.$$

Видно, что, как и для случая графов, зазор есть некоторая ограниченная функция от q . При $k > 3$ единственная попытка получить содержательные оценки пороговых вероятностей сильной раскрашиваемости случайного гиперграфа была принята в работе А.Э. Хузиевой [10], где было показано, что при

$$c < \frac{q \ln q}{6} - \frac{13}{36} \ln q - \frac{1}{6} - q^{-1/9}$$

выполнено

$$P\left(\chi_s\left(H\left(n, 4, cn/\binom{n}{4}\right)\right) \leq q\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

2. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Целью настоящей работы было получение новых оценок точных пороговых вероятностей для свойства наличия сильной раскраски случайного гиперграфа в заданное число цветов. Нами было получено полное обобщение результата Балобанова и Шабанова для 3-однородных гиперграфов на общий случай, которое сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $p\left(\binom{n}{k}\right) = cn$, $c > 0$, не зависит от n , $k \geq 4$ фиксировано. Существует такое $q_0 = q_0(k)$, что если $q > q_0(k)$ и

1)

$$c > \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q + O\left(\frac{\ln q}{q}\right), \quad (4)$$

то выполнено $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, k, p)) > q) = 1$;

2)

$$c < \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q - \frac{1}{\binom{k}{2}} - q^{-1/6}, \quad (5)$$

то выполнено $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\chi_s(H(n, k, p)) \leq q) = 1$.

Прокомментируем полученные результаты. Во-первых, оценки (4), (5) при $k = 3$ совпадают в точности с (2) и (3). Тем самым, мы действительно получили полное обобщение. Во-вторых, нижняя оценка (5) при $k = 4$ улучшает результат Хузиевой из [10]. В-третьих, зазор между оценками (4), (5) является ограниченной функцией от q и, кроме того, при больших k и q может стать сколько

угодно малым. Отметим, что последнее свойство важно и на сегодняшний день оно отсутствует, например, в случае слабых раскрасок гиперграфов. Более подробно со слабыми раскрасками читатель может ознакомиться в работах [11–13]. Некоторые недавние результаты об оценках пороговых вероятностей для других свойств раскрасок можно найти, например, в [14, 15]. Наконец, наши результаты показывают, что сильное хроматическое число случайного гиперграфа в разреженном случае сконцентрировано в одном или двух значениях.

В следующем разделе мы приведем идеи доказательства теоремы 2.

3. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 2 следует общей схеме применения метода второго момента из работы М. Дайера, А. Фриза и К. Гринхилл [11]. Оно состоит из обоснования двух утверждений. Первое говорит, что при условии (4) случайный гиперграф с вероятностью, стремящейся к 1, не допускает сильной раскраски в q цветов. Здесь мы переходим к равномерной модели случайного гиперграфа и применяем метод первого момента. В рамках последнего необходимо показать, что среди всех раскрасок наибольшую вероятность того, что случайное ребро будет правильно раскрашено в сильном смысле, дают так называемые сбалансированные раскраски, в которых в каждый цвет раскрашено $\lceil n/q \rceil$ или $\lfloor n/q \rfloor$ вершин. Поговорим более детально о доказательстве второго утверждения теоремы 2.

Вторая часть теоремы 2 говорит, что при условии (5) с вероятностью, стремящейся к 1, сильная раскраска случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ существует. Метод второго момента является стандартным методом решения в подобных задачах, но технически это очень трудный способ, упирающийся в решение разных оптимизационных проблем. Первый шаг – это использование существования точной пороговой вероятности. Данный факт позволяет доказывать лишь отдельность искомой вероятности от нуля. Действительно, если для некоторого c мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\chi_s\left(H\left(n, k, cn/\binom{n}{k}\right)\right) \leq q\right) > 0,$$

то для любого $c' < c$ будет выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\chi_s\left(H\left(n, k, c'n/\binom{n}{k}\right)\right) \leq q\right) = 1,$$

ведь величина $p = c'n/\binom{n}{k}$ будет заведомо меньше точной пороговой вероятности.

Второй шаг состоит в переходе к подпоследовательности чисел, делящихся на q , $n_t = tq$, $t \in \mathbb{N}$. Мы показываем, что достаточно проверять отделимость от нуля только по этой подпоследовательности. Далее, считаем, что n делится на q .

Третий шаг — это переход к равномерной модели случайного гиперграфа. Обозначим через $H(n, k, m)$, $m = \lceil cn \rceil$, модель случайного гиперграфа с m ребрами, которые выбираются независимо среди n^k упорядоченных (с повторениями) наборов из k вершин гиперграфа. В таком гиперграфе могут встречаться как повторяющиеся по составу вершин ребра, так и ребра с менее k различными вершинами. С помощью метода каплинга несложно проверить, что для любого $c' < c$ будет выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\chi_s\left(H\left(n, k, c'n/\binom{n}{k}\right)\right) \leq q\right) &\geq \\ &\geq \mathbb{P}(\chi_s(H(n, k, m)) \leq q) + o(1). \end{aligned}$$

Тем самым, нам достаточно проверить, что вероятность $\mathbb{P}(\chi_s(H(n, k, m)) \leq q)$ отделена от нуля при всех достаточно больших n .

Последний шаг состоит в рассмотрении множества сбалансированных сильных раскрасок случайного гиперграфа $H(n, k, m)$. Обозначим через X_n количество таких раскрасок. Тогда в силу неравенства Пэли—Зигмунда

$$\mathbb{P}(\chi_s(H(n, k, m)) \leq q) \geq \mathbb{P}(X_n > 0) \geq \frac{(EX_n)^2}{EX_n^2}.$$

Остается лишь показать, что отношение $\frac{(EX_n)^2}{EX_n^2}$ отделено от нуля или, эквивалентно, что существует такая положительная функция $A(k, q) > 0$, что для всех достаточно больших n выполнено

$$\frac{(EX_n)^2}{(EX_n^2)} \leq A(k, q). \quad (6)$$

В рамках вычисления отношения в левой части (6) естественным образом возникает сумма по некоторому семейству дважды стохастических матриц, которую нужно оценивать. Оценка требует решения следующей оптимизационной задачи.

Пусть $q \geq 2$ — натуральное число. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_q$ матриц размера $q \times q$ с неотрицательными элементами, которые удовлетворяют следующим свойствам сумм элементов по столбцам и строкам: для любой $M = (m_{ij}; i, j = 1, \dots, q) \in \mathcal{M}_q$ выполнено

$$1) \text{ для любого } i = 1, \dots, q \text{ выполнено } \sum_{j=1}^q m_{ij} = \frac{1}{q};$$

$$2) \text{ для любого } j = 1, \dots, q \text{ выполнено } \sum_{i=1}^q m_{ij} = \frac{1}{q}.$$

Далее, для каждой $M \in \mathcal{M}_q$ введем функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_q(M) &= -\sum_{i,j=1}^q m_{ij} \ln(m_{ij}), \\ \mathcal{E}_q(M) &= \ln \left(\sum_{\substack{i_1 \neq \dots \neq i_k \\ j_1 \neq \dots \neq j_k}} m_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot m_{i_k j_k} \right) \end{aligned}$$

и $\mathcal{G}_{q,c}(M) = \mathcal{H}_q(M) + c \cdot \mathcal{E}_q(M)$, где $c > 0$ — некоторое положительное число. Очень важной и имеющей самостоятельный интерес является следующая

Лемма 1. Для любого $k \geq 4$ существует такое $q_0 = q_0(k)$, что для всех $q > q_0$ и всех c , удовлетворяющих неравенству (5), максимальное значение функции $\mathcal{G}_{q,c}(M)$ достигается при $M = J_q$, где J_q — это матрица размера $q \times q$, все элементы которой равны $1/q^2$. Более того, в тех же условиях существует такая функция $b(k, q) > 0$, что для всех $M \in \mathcal{M}_q$ выполнено

$$\mathcal{G}_{q,c}(J_q) - \mathcal{G}_{q,c}(M) \geq b(k, q) \sum_{i,j=1}^q \left(m_{ij} - \frac{1}{q^2} \right)^2.$$

Отметим, что доказательство леммы 1 в отличие от аналогичных утверждений из работ [9] и [13] сильно затруднено невозможностью проводить “построчный” анализ, когда разность $\mathcal{G}_{q,c}(J_q) - \mathcal{G}_{q,c}(M)$ распадается в сумму слагаемых, каждое из которых зависит только от одной строки матрицы M . С помощью леммы 1 несложно устанавливается неравенство (6), что завершает доказательство теоремы 2.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа второго и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-70039. Работа третьего автора также поддержана грантом Президента РФ № МД-1562.2020.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt J. Probabilistic analysis of strong hypergraph coloring algorithms and the strong chromatic number // Discrete Mathematics. 1987. V. 66. P. 258–277.
2. Shamir E. Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs // Adv. Comput. Res. 1989. V. 5. P. 127–142.
3. Krivelevich M., Sudakov B. The chromatic numbers of random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 1998. V. 12. № 4. P. 381–403.
4. Łuczak T. The chromatic number of random graphs // Combinatorica. 1991. V. 11. № 1. P. 45–54.

5. *Hatami H., Molloy M.* Sharp thresholds for constraint satisfaction problems and homomorphisms // *Random Structures and Algorithms*. 2008. V. 33. № 3. P. 310–332.
6. *Achlioptas D., Naor A.* The two possible values of the chromatic number of a random graph // *Annals of Mathematics*. 2005. V. 162. № 3. P. 1335–1351.
7. *Coja-Oghlan A.* Upper-bounding the k -colorability threshold by counting cover // *Electronic Journal of Combinatorics*. 2013. V. 20. № 3. Research paper № 32.
8. *Coja-Oghlan A., Vilenchik D.* The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // *International Mathematics Research Notices*. 2015. V. 2016. № 19. P. 5801–5859.
9. *Balabanov A.E., Shabanov D.A.* On the strong chromatic number of a random 3-uniform hypergraph // *Discrete Mathematics*. 2021. V. 344. № 3. P. 112231.
10. *Хузиева А.Э.* О сильных раскрасках 4-однородных случайных гиперграфов // *Труды МФТИ*. 2019. Т. 11. № 2. С. 91–107.
11. *Dyer M., Frieze A., Greenhill C.* On the chromatic number of a random hypergraph // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 2015. V. 113. P. 68–122.
12. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph coloring up to condensation // *Random Structures and Algorithms*. 2019. V. 54. № 4. P. 615–652.
13. *Shabanov D.A.* Estimating the r -colorability threshold for a random hypergraph // *Discrete Applied Mathematics*. 2020. V. 282. P. 168–183.
14. *Semenov A., Shabanov D.* On the weak chromatic number of random hypergraphs // *Discrete Applied Mathematics*. 2020. V. 276. P. 134–154.
15. *Семенов А.С.* Двухцветные раскраски случайного гиперграфа // *Теория вероятностей и ее применения*. 2019. Т. 64. № 1. С. 75–97.

ON THE STRONG CHROMATIC NUMBER OF RANDOM HYPERGRAPHS

T. G. Matveeva^a, A. E. Khuzieva^b, and D. A. Shabanov^{a,b,c}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia*

^c *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev

The paper deals with the study of the probability threshold for the property of strong colorability with given number of colors of the random k -uniform hypergraph in the binomial model $H(n, k, p)$. A vertex coloring of a hypergraph is said to be strong if any edge does not have two vertices of the same color under it. We study the problem of finding the sharp probability threshold of the existence of a strong coloring with q colors for $H(n, k, p)$. By using the second moment method we obtain very tight bounds for this value provided that q is large enough in comparison with k .

Keywords: random hypergraph, colorings of hypergraphs, probability thresholds, strong chromatic number, second moment method