

УДК 517.26+517.28

ФОРМУЛЫ ТИПА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

© 2022 г. А. Н. Агаджанов^{1,*}

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 05.11.2021 г.

Поступило 06.10.2021 г.

После доработки 27.02.2022 г.

Принято к публикации 28.02.2022 г.

На основе полиномов Бернштейна получены два класса формул типа Тейлора для произвольных непрерывных функций на отрезках. Эти формулы применимы как к гладким функциям, так и к функциям, которые ни в одной точке не имеют ни конечных, ни бесконечных производных. В работе формулы типа Тейлора рассматриваются в тесной связи с производными числами Дини, существующими для любых непрерывных функций. Приводится пример применения этих формул в задаче управления распределенной колебательной системой, динамика которой подчиняется представлению Даламбера.

Ключевые слова: формула Тейлора, полиномы Бернштейна, фрактальные функции, производные числа Дини, дробные производные Капуто, распределенные системы

DOI: 10.31857/S2686954322020023

Формула Тейлора для гладких функций на конечном отрезке $[a, b]$ является фундаментальным результатом классического математического анализа [1]. Ее вывод принципиально связан с существованием у непрерывных функций, по крайней мере, производной первого порядка, хотя бы в одной внутренней точке этого отрезка. Однако в банаховом пространстве $C[a, b]$ множество таких функций образует лишь множество первой категории по Бэру [2]. Иначе говоря, оно представляется в виде счетного объединения нигде неплотных множеств из $C[a, b]$. С точки зрения теории Бэра, значительно более широким классом непрерывных функций, а именно множеством второй категории в $C[a, b]$, является множество фрактальных функций.

Определение 1. Непрерывную функцию на $[a, b]$ назовем *фрактальной*, если существует множество мощности континуума из $[a, b]$, в точках которого по крайней мере одно из производных чисел Дини обращается в бесконечность.

Примерами фрактальных функций являются непрерывные функции с неограниченной вариацией, у которых на всюду плотных множествах из

$[a, b]$ мощности континуума по крайней мере одно из производных чисел Дини равняется $+\infty$.

Именно такими являются всюду недифференцируемые функции Больцано, Вейерштрасса, Такадзи, Безиковича и др. [3, 4].

Фрактальными являются также непрерывные функции, сингулярные по Лебегу, которые имеют ограниченную вариацию и производную, равную нулю почти всюду. Более того, у сингулярных функций, не имеющих интервалов монотонности, все производные числа Дини обращаются в бесконечность с соответствующим знаком на множестве мощности континуума и второй категории по Бэру из $[a, b]$ [4].

Вместе с тем существуют непрерывные функции, не имеющие интервалов монотонности, которые в каждой точке интервала (a, b) обладают конечной производной [5]. В соответствии с выше приведенным определением, такие функции фрактальными не являются.

В последние годы фрактальные функции находят применение в задачах, связанных с моделированием хаотической динамики физических систем, а также в задачах управления ими [6–8]. Очевидно, что классическая формула Тейлора в принципе не применима к фрактальным функциям. Этот факт существенно сокращает сферу ее практического применения.

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: ashot_ran@mail.ru

В настоящей работе приведены два класса формул типа Тейлора, справедливых для произвольных функций из $C[a, b]$, структура которых радикально отличается от классической формулы Тейлора.

Центральную роль при построении новых классов формул типа Тейлора играют полиномы Бернштейна, позволяющие при фиксированной степени полиномов и допустимом выборе приращения их аргументов получать сколь угодно точные поточечные приближения произвольных непрерывных функций на конечных отрезках.

1. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И КОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЧИСЛА ДИНИ ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

История появления формулы Тейлора и различных ее доказательств на протяжении последних трех столетий представлена в [9]. В последние десятилетия получены формулы Тейлора на основе различных типов дробных производных от непрерывных функций [10]. С современной точки зрения фундаментальное значение в теории непрерывных функций имеют не только теоремы, связанные с формулой Тейлора, но и теорема Данжуа, которая описывает поведение производных чисел Дини (аналогов классических производных), существующих для любых непрерывных функций [11].

Напомним, что верхним правым производным числом Дини $D^+ f(x)$ функции f в точке x называют предел $D^+ f(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Правое нижнее производное число Дини функции f в точке x определяется как $D_+ f(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Верхние $D^- f(x)$ и нижние $D_- f(x)$ левые производные числа Дини функции f в точке x определяются аналогично.

С целью полноты изложения приведем формулировку теоремы Данжуа [5, 11].

Теорема 1 (Данжуа). Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Тогда в каждой точке множества полной меры выполняется одно из следующих условий:

- а) $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$;
- б) $D^+ = D_- \neq \pm\infty$, $D_+ = -\infty$, $D^- = +\infty$;
- в) $D_+ = D^- \neq \pm\infty$, $D^+ = +\infty$, $D_- = -\infty$;
- г) $D^+ = D^- = D_+ = D_- \neq \pm\infty$.

Из теоремы Данжуа следует, что поведение производных чисел Дини отражает как локальную, так и глобальную сложность непрерывных функций.

Ниже представлена теорема, описывающая связь между конечными производными числами Дини и формулами Тейлора для гладких функций. Эти формулы принципиально отличаются друг от друга видом остаточного члена.

Теорема 2. Пусть x_0 — произвольная точка из (a, b) , величина $h > 0$ (это условие не нарушает общности результатов) таково, что $x_0 + h \in (a, b)$. Предположим, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(n-1)$ порядка на интервале (a, b) , а производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ конечны на (a, b) . Тогда имеют место следующие представления:

$$1. f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad (1)$$

если $x_0 \in P$, где P — множество второй категории полной лебеговой меры на (a, b) , на котором производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ конечны и равны; $\xi \in (x_0, x_0 + h) \cap P$.

$$2. f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n}{n!} (t \cdot f_+^{(n)}(\theta) + (1-t) \cdot f_-^{(n)}(\theta)), \quad (2)$$

если $x_0 \in P_1$, где P_1 — нуль-множество первой категории из (a, b) , на котором производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяют равенствам $D^+ f^{(n-1)}(x) = D_+ f^{(n-1)}(x) = f_+^{(n)}(x)$ ($f_+^{(n)}(x)$ — правосторонняя производная от $f^{(n-1)}(x)$), $D^- f^{(n-1)}(x) = D_- f^{(n-1)}(x) = f_-^{(n)}(x)$ ($f_-^{(n)}(x)$ — левосторонняя производная от $f^{(n-1)}(x)$), причем $f_+^{(n-1)}(x) \neq f_-^{(n-1)}(x)$.

Точки из множества P_1 либо принадлежат нуль-множеству типа G_δ , либо нуль-множеству типа $G_{\delta\sigma}$. Параметр $t \in [0, 1]$ и определяется по формуле

$$t = \frac{\frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f_-^{(n)}(\theta)}{f_+^{(n)}(\theta) - f_-^{(n)}(\theta)},$$

где $\theta \in (x_0, x_0 + h) \cap P_1$ — произвольное решение неравенства

$$\left(\frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f_+^{(n)}(\theta) \right) \times \left(\frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f_-^{(n)}(\theta) \right) \leq 0.$$

$$3. \text{ а) } f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n}{n!} (t_1 D^+ f^{(n-1)}(\theta_1) + (1 - t_1) D^- f^{(n-1)}(\theta_1)), \quad (3)$$

где $t_1 = \frac{D^- f^{(n-1)}(\theta_1)}{D^- f^{(n-1)}(\theta_1) - D^+ f^{(n-1)}(\theta_1)}$, θ_1 — произвольное решение неравенства $D^+ f^{(n-1)}(\theta_1) \cdot D^- f^{(n-1)}(\theta_1) \leq 0$;

$$\text{б) } f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n}{n!} (t_2 D^+ f^{(n-1)}(\theta_2) + (1 - t_2) D_- f^{(n-1)}(\theta_2)), \quad (4)$$

где $t_2 = \frac{D_- f^{(n-1)}(\theta_2)}{D_- f^{(n-1)}(\theta_2) - D^+ f^{(n-1)}(\theta_2)}$, θ_2 — произвольное решение неравенства $D^+ f^{(n-1)}(\theta_2) \cdot D_- f^{(n-1)}(\theta_2) \leq 0$;

$$\text{в) } f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n}{n!} (t_3 D_+ f^{(n-1)}(\theta_3) + (1 - t_3) D^- f^{(n-1)}(\theta_3)), \quad (5)$$

где $t_3 = \frac{D^- f^{(n-1)}(\theta_3)}{D^- f^{(n-1)}(\theta_3) - D_+ f^{(n-1)}(\theta_3)}$, θ_3 — произвольное решение неравенства $D^- f^{(n-1)}(\theta_3) \cdot D_+ f^{(n-1)}(\theta_3) \leq 0$;

$$\text{г) } f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n}{n!} (t_4 D_+ f^{(n-1)}(\theta_4) + (1 - t_4) D_- f^{(n-1)}(\theta_4)), \quad (6)$$

где $t_4 = \frac{D_- f^{(n-1)}(\theta_4)}{D_- f^{(n-1)}(\theta_4) - D_+ f^{(n-1)}(\theta_4)}$, θ_4 — произвольное решение неравенства $D_+ f^{(n-1)}(\theta_4) \cdot D_- f^{(n-1)}(\theta_4) \leq 0$,

если $x_0 \in P_2$, где P_2 — нуль-множество первой категории, на котором производные числа Дини попарно не равны друг другу.

Точки из множества P_2 либо принадлежат нуль-множеству типа G_σ , либо нуль-множеству типа $G_{\delta\sigma}$.

Следствие 1. Производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ почти всюду дифференцируемы на (a, b) .

Следствие 2. Производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ обладают N -свойством Лузина, т.е. образ произвольного измеримого множества из (a, b) при отображении производным числом Дини является измеримым множеством из $\mathbb{R}$, причем образом произвольного нуль-множества из (a, b) является нуль-множество из $\mathbb{R}$.

Следствие 3. Производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяют T_2 -условию на (a, b) , т.е. почти каждое свое значение они принимают не более счетного числа раз.

Следствие 4. Каждое из множеств P, P_1, P_2 может быть представлено в виде конечного или счетного объединения множеств, на каждом из которых производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяют условию Липшица.

Следствие 5. Множество точек непрерывности функции $f^{(n)}(x)$ есть множество $P_0 \subset P$, которое является всюду плотным G_δ -множеством на P .

Представления (1), (2) и (3)–(6) — являются формулами Тейлора–Лагранжа, Тейлора–Караматы [12] и Тейлора–Гуднера [13] соответственно. Они справедливы только для непрерывных функций с ограниченными производными числами Дини.

Ниже представлены формулы типа Тейлора для произвольных непрерывных функций на отрезках, у которых производные числа Дини могут принимать бесконечные значения. Как указано выше, именно такой фундаментальной особенностью обладают фрактальные функции.

2. КЛАССЫ ФОРМУЛ ТИПА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНЕЧНЫХ ОТРЕЗКАХ

Не нарушая общности, в дальнейшем будем рассматривать непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 3. Для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ при $x_0 \in (0, 1)$, $h > 0$, $x_0 + h \in (0, 1)$ имеет место представление

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A_{0,n}(x_0, h) \cdot f(0) + A_{n,n}(x_0, h) \cdot f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) A_{k,n}(x_0, h) + R_n(f; x_0, h), \quad (7)$$

где $n \geq 2$, $C_n^k = \frac{k!}{k!(n-k)!}$ ($n \geq k$), $A_{0,n}(x_0, h) =$

$$= (1 - (x_0 + h))^n - (1 - x_0)^n, \quad A_{n,n}(x_0, h) = (x_0 + h)^n - x_0^n,$$

$$A_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot C_{n-k}^l \cdot \left(\sum_{s=1}^{n-l} C_{n-l}^s \cdot x_0^{n-l-s} \cdot h^s \right), \quad R_n(f; x_0,$$

$h) = r_n^1(f; x_0, h) - r_n^0(f; x_0) - \text{остаточный член, непрерывно зависящий от параметра } h \text{ и удовлетворяющий условию } \lim_{h \rightarrow 0} R_n(f; x_0, h) = 0.$

Здесь $r_n^0(f; x_0)$, $r_n^1(f; x_0, h)$ — погрешности приближений функции f полиномом Бернштейна

$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ в точках x_0 и $x_0 + h$ соответственно.

Следствие 6. Непрерывная функция f имеет в точке x_0 конечную производную тогда и только тогда, когда при некотором $n \in N$ существует конечный предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(f; x_0, h)}{h}.$$

При каждом натуральном значении $n \geq 2$ представление (7) является формулой типа Тейлора первого класса.

Из (7) следует, что для оценивания значений произвольной непрерывной функции f в точках конечного интервала принципиально не требуется наличия у нее производных как целого, так и дробного порядков (любых видов) хотя бы в одной точке.

В отличие от теоремы 3 в следующей теореме указана процедура выбора параметра h в зависимости от конкретной функции f , точки x_0 , а также величин n , N и α .

Теорема 4. Для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ при $x_0 \in (0, 1)$, $h > 0$, $x_0 + h \in (0, 1)$, $0 < \alpha < 1$, $n \geq 2$, $N \geq 2$ имеет место представление

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \\ &+ A_{0,n}(x_0, h) \cdot f(0) + A_{n,n}(x_0, h) \cdot f(1) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) ((x_0 + h)^\alpha \times \\ &\times {}_C D g_{k,n}(\xi_{k,n}) - x_0^\alpha \cdot {}_C D g_{k,n}(\lambda_{k,n})) + R_n(f; x_0, h), \end{aligned} \quad (8)$$

где $A_{0,n}(x_0, h) = (1 - (x_0 + h))^n - (1 - x_0)^n$, $A_{n,n}(x_0, h) = (x_0 + h)^n - x_0^n$, ${}_C D^\alpha g_{k,n}(t)$ — производная Капуто от функции $g_{k,n}(t) = t^k (1-t)^{n-k}$, которая в каждой точке может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} {}_C D^\alpha g_{k,n}(t) &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \times \\ &\times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(p+1)} \cdot U_{k,n,p}(t) + \\ &+ \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot (n-l) \cdot C_{n-k}^l \cdot t^{n-l-1} \right). \end{aligned}$$

Здесь $U_{k,n,p} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot \frac{(n-l)(n-l-1)}{n-l+p-1} \cdot C_{n-k}^l \cdot t^{n-l-1}$.

Числа $\xi_{k,n} \equiv \xi_{k,n}(x_0, h, \alpha)$ при каждом $k = 1, \dots, n-1$ являются корнями уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot C_{n-k}^l \cdot \frac{\Gamma(n-l+1)}{\Gamma(n-l-\alpha+1)} \cdot z^{n-l-\alpha} &= \\ &= \Gamma(\alpha+1) \cdot (x_0 + h)^{k-\alpha} \cdot (1 - (x_0 + h))^{n-k}, \end{aligned}$$

причем $0 \leq \xi_{k,n} \leq x_0 + h$, числа $\lambda_{k,n}(x_0, \alpha)$ при каждом $k = 1, \dots, n-1$ являются корнями уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot C_{n-k}^l \cdot \frac{\Gamma(n-l+1)}{\Gamma(n-l-\alpha+1)} \cdot z^{n-l-\alpha} &= \\ &= \Gamma(\alpha+1) \cdot x_0^{k-\alpha} \cdot (1 - x_0)^{n-k}, \end{aligned}$$

причем $0 \leq \lambda_{k,n} \leq x_0$.

Допустимые значения параметра h при фиксированных значениях x_0 , α , n , N должны удовлетворять неравенству

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left| \frac{(x_0 + h)^\alpha \cdot (\xi_{k,n})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \times \right. \\ &\times \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(p+1)} \cdot U_{k,n,p}(\xi_{k,n}) - \\ &\left. - \frac{x_0^\alpha \cdot (\lambda_{k,n})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \times \right. \\ &\times \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(p+1)} \cdot U_{k,n,p}(\lambda_{k,n}) \left| \leq 10^{-q} \cdot \varepsilon \right. \end{aligned}$$

где $q > 0$ такое достаточно большое число, что для остаточного члена выполняется неравенство $|R(f; x_0, h)| \leq \varepsilon$.

Для каждой пары натуральных значений $n \geq 2$, $N \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$ представление (8) определяет формулу типа Тейлора второго класса.

Отметим, что формула (8) принципиально связана как с представлением производной Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ от непрерывных функций из [14], так и с теоремой о среднем для производных Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ из [10].

3. ФОРМУЛЫ ТИПА ТЕЙЛОРА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Приведем пример, показывающий значение формул типа Тейлора (7) и (8) в задаче управления одномерной колебательной системой, динамика которой описывается представлением Даламбера [15]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Phi(z) dz + \mu(t-x) + \nu(t-(l-x)). \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ – нечетные продолжения функций $\varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x)$ и $\psi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(x)$ соответственно на сегменты $[-l, 0]$ и $[l, 2l]$. Функция $\mu(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(t)$ на $[0, T]$, $\mu(0) = 0$, $\mu(t) \equiv 0$ при аргументах $t < 0$. Аналогичным условиям удовлетворяет и функция $v(t)$. Отметим, что функции $\mu(t)$ и $v(t)$ являются функциями, управляющими динамикой системы.

Функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(x)$, $\mu_m(t)$, $v_m(t)$ определяются из условий:

$$\varphi_m(x) = u_m(x, 0), \quad \left. \frac{du_m(x, t)}{dt} \right|_{t=0} = \psi_m(x),$$

$$\mu_m(t) = \frac{\varphi_m(t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \psi_m(z) dz, \quad (9)$$

$$v_m(t) = \frac{\varphi_m(l-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{l-t} \psi_m(z) dz. \quad (10)$$

Функции $u_m(t)$ являются классическими решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 u_m(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

Не нарушая общности, будем считать, что $T=1$. Из формул (9) и (10) можно найти значения функций $\mu_m(t)$ и $v_m(t)$ в точках $\frac{k}{n}$ при $k = 0, \dots, n$. Затем с помощью предельных переходов определяются значения функций $\mu(t)$ и $v(t)$ в этих же точках. Применяя формулы (7) и (8), можно получить оценки управляющих функций $\mu(t)$ и $v(t)$ в произвольной точке из интервала $(0, 1)$.

Аналогичные рассуждения справедливы при оценивании соответствующих функций в других задачах управления распределенными системами [15].

В заключение отметим, что представляет несомненный интерес построение формул типа Тейлора для произвольных непрерывных функций от нескольких действительных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.И., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1971.
2. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974.
3. Jarnichi M., Pflug P. Continuous Nowhere Differentiable Functions. Springer, 2018.
4. Garg K.M. // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1969. V. XIV. № 10. P. 1441–1452.
5. Bruckner A.M. Differentiation of Real Function. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1994.
6. Shu-Tang Liu, Pei Wang. Fractal Control Theory. Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2018.
7. Агаджанов А.Н. // ДАН. 2017. Т. 473. № 1. С. 7–11.
8. Агаджанов А.Н. // ДАН. 2014. Т. 454. № 5. С. 503–506.
9. Persson L.E., Rafeiro H., Wall P. // Note Math. 2017. V. 37. № 1. P. 1–21.
10. Odibat Z.M., Shawagfeh N.T. Generalized Taylor's formula // Appl. Math. and Comp. 2007. P. 286–293.
11. Сакс С. Теория интеграла. М.: Факториал Пресс, 2004.
12. Wituba R., Hetmaniok E., Slota D. // Fasciculi mathematicae. 2012. V. 48. P. 145–153.
13. Goodner D.B. Amer. Math. Monthly // 1960. V. 67. № 9. P. 852–855.
14. Atanackovic T.M., Stankovic B. // Mechanics Research Communications. 2008. V. 35. P. 429–438.
15. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М: Физматлит, 2004.

TAYLOR-TYPE FORMULAS FOR ARBITRARY CONTINUOUS FUNCTIONS ON SEGMENTS AND THEIR APPLICATION IN CONTROL PROBLEMS FOR DISTRIBUTED SYSTEMS

A. N. Agadzhanov^a

^a V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

In the present report, on the basis of Bernstein polynomials, two classes of Taylor-type formulas for arbitrary continuous functions on intervals are obtained. These formulas are applicable both to smooth functions and to functions that have neither finite nor infinite derivatives at any point. In this paper, Taylor-type formulas are considered in close connection with the derivatives of Dini numbers that exist for any continuous functions. The message provides an example of the application of these formulas in the problem of controlling a distributed oscillatory system, the dynamics of which obeys the d'Alembert representation.

Keywords: Taylor's formula, Bernstein polynomials, fractal functions, derivatives of Dini numbers, fractional derivatives of Caputo, distributed systems