ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 23–25

МАТЕМАТИКА

УДК 512.544.33

ОПИСАНИЕ КООРДИНАТНЫХ ГРУПП НЕПРИВОДИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ НАД СВОБОДНЫМИ 2-НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ

© 2022 г. М. Г. Амаглобели[1,*], А. Г. Мясников[2,], В. Н. Ремесленников[3,***]**

Представлено академиком РАН Ю.Л. Ершовым 05.09.2021 г.
Поступило 03.12.2021 г.
После доработки 03.12.2021 г.
Принято к публикации 23.01.2022 г.

В этой статье мы даем удобное чисто алгебраическое описание координатных групп неприводимых алгебраических множеств над свободной двуступенно нильпотентной (2-нильпотентной) неабелевой группой N конечного ранга. Заметим, что в алгебраической геометрии над произвольной группой N естественно рассматривать группы, содержащие N в качестве подгруппы (так называемые N-группы), и гомоморфизмы N-групп, которые являются тождественными на N (N-гомоморфизмы). Как следствие, мы получаем описание всех конечно порожденных групп универсально эквивалентных группе N (в языке с констаниами из N), а также получаем простой критерий, когда конечно порожденная N-группа H, аппроксимируемая N-ретракатами на N, является дискриминируемой такими ретрактами.

Ключевые слова: алгебраическая геометрия над группой, алгебраическое множество, неприводимое алгебраическое множество, координатная группа, дискриминируемость, универсальняа эквивалентность

DOI: 10.31857/S2686954322020047

Основные понятия алгебраической геометрии над группами были изложены в работах Г. Баумслага, А. Мясникова и В. Ремесленникова [1], которым мы следуем в терминологии и обозначениях. Более общая, универсальная алгебраическая геометрия, применимая к произвольным алгебраическим системам, была начата в работах Плоткина, Даниаровой, А. Мясникова и В. Ремесленникова и успешно развивается для полугрупп, некоммутативных колец, полурешеток и графов. В настоящее время алгебраическая геометрия над группами стала важным инструментом изучения в комбинаторной, геометрической и теоретико-модельной теории групп. Наиболее полно разработаны алгебро-геометрические методы для свободных групп, гиперболических групп и частично-коммутативных групп, а также для метабелевых, свободных разрешимых и жестких разрешимых групп. Одним из принципиальных открытых вопросов в этой области является построение алгебраической геометрии над нильпотентными группами без кручения, в частности, над свободными нильпотентными группами. Помимо непосредственного интереса к нильпотентным группам, важность этого вопроса заключается также в том, что во многих случаях подгруппа Фиттинга Φ группы G выделится в G некоторой конечной системой уравнений, поэтому алгебраическая геометрия над нильпотентной группой Φ непосредственно вкладывается в алгебраическую геометрию исходной, возможно, не нильпотентной группы G. В этой работе мы описываем алгебраические свойства координатных групп алгебраических множеств и их неприводимых компонент над группой N (топология Зарисского нетерова над группой N, а потому каждое алгебраическое множество есть конечное объединение своих неприводимых компонент). Эти результаты позволяют надеяться на решение других фундаментальных вопросов в алгебраической геометрии над N, например, получить разумное описание множеств решений конечных систем уравнений

[1] *Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*
[2] *Стивенс Технологический Институт, Хобокен, США*
[3] *Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Омск, Россия*
**E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge*
***E-mail: amiasnikov@gmail.com*
****E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru*

над N (несмотря на то, что Диофантова проблема над N неразрешима).

Заметим, что в алгебраической геометрии над произвольной группой N естественно рассматривать группы, содержащие N в качестве подгруппы (так называемые N-группы), и гомоморфизмы N-групп, которые являются тождественными на N (N-гомоморфизмы). Наш подход к описанию координатных групп базируется на некоторых результатах о дискриминируемости, которые также представляет самостоятельный интерес. Напомним, что N-группа H N-аппроксимируется (N-дискриминируется) N-группой G, если для любого $h \in H$, $h \neq 1$, (любых неединичных $h_1, \ldots, h_n \in H$) существует N-гомоморфизм $\phi : H \to G$ такой, что $\phi(h) \neq 1$ ($\phi(h_i) \neq 1$, $i = 1, \ldots, n$). Если $N = 1$, то получаем стандартные понятия аппроксимируемости и дискриминируемости, которые появляются в разных областях теории групп: в теории многообразий групп, в комбинаторной теории групп (группы, аппроксимируемые классом групп $\mathcal{K}$), в геометрической теории групп (как пределы в пространствах Громова–Хаусдорфа) и т.д. В последние годы это понятие начало играть важную роль в теории моделей групп (для характеризации групп универсально эквивалентных данной) и алгебраической геометрии над группами.

В 1967 г. Б. Баумслаг доказал, что группа H дискриминируется свободной неабелевой группой F тогда и только тогда, когда она аппроксимируется группой F и при этом является коммутативно-транзитивной, или CT-группой (отношение коммутирования является транзитивным на множестве неединичных элементов из H, т.е. централизаторы неединичных элементов из H – абелевы). Позже выяснилось, что подобные результаты справедливы для многих других групп (например, для гиперболических групп без кручения). Однако неабелевы нильпотентные группы никогда не являются CT-группами, поскольку всегда имеют нетривиальный центр. Тем не менее оказалось, что можно слегка обобщить определение CT-группы, так что новое определение работает и в классах нильпотентных групп. А именно, группа H называется CT-группой уровня k, $k = 0, 1, \ldots$, или CT_k-группой, если централизатор любого элемента, не лежащего в $Z_k(H)$, является абелевым; здесь $Z_k(H)$ – это k-й член верхнего центрального ряда H. В частности, если $k = 0$, то $Z_0(H) = 1$, а потому CT_0-группы – это, в точности, CT-группы. Заметим, что CT_1-группы – это группы, в которых централизаторы нецентральных элементов – абелевы. Ясно, что N является CT_1-группой. Понятие CT_1-группы было введено в [3].

Предложение 1. Пусть N – свободная неабелева к-нильпотентная группа конечного ранга. Если N-группа H N-дискриминируется группой N, то H является CT_{k-1}-группой.

В частности, если N является 2-нильпотентной группой, то N-группа H, N-дискриминируемая группой N, является CT_1-группой. Следующая гипотеза, если она верна, дает аналог теоремы Б. Баумслага для 2-нильпотентных групп.

Гипотеза 1. Пусть N – свободная неабелева 2-нильпотентная группа конечного ранга и H – конечно порожденная N-группа. Тогда H N-дискриминируется группой N тогда и только тогда, когда H является CT_1-группой N-аппроксимируемой группой N.

Теперь мы можем приступить к описанию основных результатов статьи об алгебраической геометрии. Для этого нам понадобятся некоторые определения.

Пусть G – группа из многообразия $\mathcal{N}_2$ нильпотентных групп ступени нильпотентности ≤ 2. Декартова степень $G^n = G \times \cdots \times G$ (n копий) называется аффинным пространством над G. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество переменных, $G[X] = G *_{\mathcal{N}_2} F(X)$ – нильпотентное произведение, где $F(X)$ – свободная нильпотентная группа в $\mathcal{N}_2$ с базой X. Система уравнений S (или $S = 1$) над G есть произвольное подмножество из $G[X]$. Элемент $u \in S$ может рассматриваться как групповое слово от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из G, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Элемент $p = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ называется решением системы $S = 1$ в G, если $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$ в G для каждого $u \in S$. Подмножество V аффинного пространства G^n называется алгебраическим множеством над G, если V – множество всех решений некоторой системы уравнений S из $G[X]$; в этом случае пишем $V = V_G(S)$. Кроме того, для $V = V_G(S)$ определим $Rad(V) = \{u \in G[X] \mid u(p) = 1 \quad \forall p \in V_G(S)\}$. Очевидно, что $Rad(V)$ всегда является нормальной подгруппой в $G[X]$. Группа $\Gamma(V) = G[X] / Rad(V)$ называется координатной группой алгебраического множества V. Заметим, что $\Gamma(V)$ является G-группой относительно естественного вложения $G \to \Gamma(V)$.

Беря в качестве предбазы замкнутых множеств все алгебраические множества из G^n, превратим G^n в топологическое пространство (топология Зарисского). Стандартным способом определяется

в G^n понятие неприводимого алгебраического множества. Известно, что топология Зарисского на G^n для любой линейной группы G, в частности, для каждой конечно порожденной нильпотентной группы, является нетеровой, а значит, каждое алгебраическое множество из G^n распадается в конечное объединение неприводимых алгебраических множеств.

Теорема 1. *Пусть N — свободная неабелева нильпотентная группа конечного ранга и H конечно порожденная N-группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *H есть координатная группа некоторого алгебраического множества из N^k для некоторого натурального числа k*;

2) *H N-аппроксимируется группой N*;

3) *H является N-подгруппой некоторого конечного прямого произведения $N^k = N_1 \times \cdots \times N_k$ групп $N_i \simeq N$ для некоторого натурального числа k, в котором N вложена диагонально*.

Наконец, мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Пусть N — свободная неабелева 2-нильпотентная группа конечного ранга и H — координатная группа некоторого неприводимого алгебраического множества из N^n. Тогда выполняются следующие условия*:

1) *H N-дискриминируется группой N*;

2) *H является N-подгруппой некоторого конечного прямого произведения $N^k = N_1 \times \cdots \times N_k$ групп $N_i \simeq N$ для некоторого натурального числа k, в котором N вложена диагонально, и, кроме того, H является CT_1-группой*;

3) *H является N-подгруппой некоторого конечного прямого произведения $N^k = N_1 \times \cdots \times N_k$ групп $N_i \simeq N$ для некоторого натурального числа k, в котором N вложена диагонально, и, кроме того, для любого $i = 1, \ldots, k$ пересечение $H \cap N_i$ является абелевой нормальной подгруппой в H*.

Гипотеза 2. *Условия* 1), 2) *и* 3) *для групп N и H в Теореме* 2 *эквивалентны*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. № 1. P. 16–79. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.7881
2. *Baumslag B.* Residually free groups // Proc. London Math. Soc. 1967. V. 17. № 3. P. 402–418.
3. *Levin F., Rosenberger G.* On power-commutative and commutation-transitive groups // Proceedings of groups. 1985. St. Andrews. P. 249–253. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 121, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

DESCRIPTION OF THE COORDINATE GROUPS OF IRREDUCIBLE ALGEBRAIC SETS OVER FREE 2-NILPOTENT GROUPS

M. G. Amaglobeli[a], A. G. Miasnikov[b], and V. N. Remeslennikov[c]

[a] *Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

[b] *Stevens Institute of Technology, Hoboken, USA*

[c] *Omsk Department of Sobolev's Institute of Matematics, Omsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS Yu.L. Ershov

In this paper we give a pure algebraic description of the coordinate groups of irreducible algebraic sets over non-abelian free 2-nilpotent group N. As a corollary we describe finitely generated groups H which are universally equivalent to the group N (with constants from N in the language). Besides, we give a pure algebraic criterion when a group H, containing N as a subgroup, and N-separated by N, is in fact N-discriminated by N.

Keywords: algebraic geometry over groups, algebraic set, irreducible algebraic set, coordinate groups, discrimination, universal equivalence