ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 5–10

МАТЕМАТИКА

УДК 512.745.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ *B*-КОРНЕВЫХ ПОДГРУПП НА АФФИННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

 Р. С. Авдеев[1,*], В. С. Жгун[1,2,]**

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 14.12.2021 г.
Поступило 22.12.2021 г.
После доработки 22.12.2021 г.
Принято к публикации 28.12.2021 г.

Пусть X – неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, являющееся сферическим относительно действия связной редуктивной группы G. В настоящей работе приведены достаточные условия, сформулированные в терминах комбинаторики весов, для существования на X однопараметрических аддитивных действий, нормализуемых борелевской подгруппой $B \subset G$. В качестве приложения доказано, что всякий G-инвариантный простой дивизор в X можно соединить с открытой G-орбитой при помощи подходящего B-нормализуемого однопараметрического аддитивного действия.

Ключевые слова: действия аддитивных групп, торическое многообразие, сферическое многообразие, корень Демазюра, локально-нильпотентное дифференцирование, теорема о локальной структуре

DOI: 10.31857/S2686954322020059

1. Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, снабженное действием связной редуктивной алгебраической группы G. Всякое нетривиальное регулярное действие на X аддитивной группы $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K},+)$ индуцирует алгебраическую подгруппу в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$, называемую $\mathbb{G}_a$*-подгруппой*. Для произвольной $\mathbb{G}_a$-подгруппы H на X всякий ненулевой элемент одномерной алгебры Ли $\mathrm{Lie}(H)$ естественным образом задает локально нильпотентное дифференцирование (кратко ЛНД) ∂ на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$, причем в случае квазиаффинного X подгруппа H может быть восстановлена при помощи взятия экспоненты от ∂.

В настоящей работе нас будут интересовать $\mathbb{G}_a$-подгруппы на X, нормализуемые действием борелевской подгруппы $B \subset G$. Следуя работе [1], мы называем такие $\mathbb{G}_a$-подгруппы ***B*-корневыми подгруппами** на X. Для всякой B-корневой подгруппы H на X присоединенное действие группы B на $\mathrm{Lie}(H)$ сводится к умножению на характер группы B, который мы обозначим через χ_H и будем называть *весом* H. Если ∂ – локально нильпотентное дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$, соответствующее H, то ∂ также нормализуется группой B, причем с тем же весом χ_H.

2. Всюду далее будем предполагать, что многообразие X является сферическим, т.е. оно нормально и обладает открытой B-орбитой. Обозначим через $\mathfrak{D}^B$ (соответственно $\mathfrak{D}^G$) конечное множество всех B-инвариантных (соответственно G-инвариантных) простых дивизоров в X. Элементы множества $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^B \setminus \mathfrak{D}^G$ традиционно называются *красками* сферического многообразия X.

Напомним известное разделение красок в X на три типа (см. [2, 3]). Зафиксируем произвольную краску $D \in \mathfrak{D}$. Для нее в группе G всегда можно выбрать минимальную параболическую подгруппу $Q \supset B$ с условием $QD \neq D$. Для каждой подгруппы $F \subset Q$ обозначим через $\bar{F}$ ее образ в Q/Q_r, где Q_r – разрешимый радикал в Q. Выберем произвольную точку z из открытой B-орбиты в X и обозначим через Q_z ее стабилизатор в Q. Заметим, что $Qz \cap D \neq \varnothing$. Поскольку $Q_r \subset B$, естественный морфизм

$$Qz \simeq Q/Q_z \to Q/(Q_z Q_r) \simeq \bar{Q}/\bar{Q}_z \qquad (1)$$

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[2] *Федеральный научный центр “Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”, Москва, Россия*
*E-mail: suselr@yandex.ru
**E-mail: zhgoon@mail.ru

факторизации по Q_r индуцирует сохраняющую коразмерности биекцию между B-орбитами в Qz и $\bar{B}$-орбитами в $\bar{Q}/\bar{Q}_z$. В частности, $\bar{Q}/\bar{Q}_z$ содержит открытую $\bar{B}$-орбиту. Поскольку группа $\bar{Q}$ изоморфна либо SL_2, либо PSL_2, для Q_z имеются следующие три возможности.

Тип (U): $\bar{Q}_z$ содержит максимальную унипотентную подгруппу в $\bar{Q}$. В этом случае $Qz \backslash Bz$ есть одна B-орбита коразмерности 1, совпадающая с $Qz \cap D$.

Тип (T): $\bar{Q}_z$ является максимальным тором в $\bar{Q}$. В этом случае $Qz \setminus Bz$ содержит две B-орбиты коразмерности 1, одна из которых совпадает с $Qz \cap D$.

Тип (N): $\bar{Q}_z$ является нормализатором максимального тора в $\bar{Q}$. В этом случае $Qz \backslash Bz$ есть одна B-орбита коразмерности 1, совпадающая с $Qz \cap D$.

Известно, что определенный выше тип не зависит от выбора минимальной параболической подгруппы $Q \supset B$ с условием $QD \neq D$ (см. [3], Prop. 1). Это позволяет корректно определить тип для каждой краски в X.

З а м е ч а н и е 1. Определенные выше типы (U), (T), (N) красок на X совпадают с типами b, a, a' соответственно в обозначениях Лу́ны (см. [4, §§2.7, 3.4] или [5, §30.10]).

3. Как следует из [1, Prop. 1.6], для всякой B-корневой подгруппы H на X существует не более одного дивизора $D \in \mathfrak{D}^B$ с условием $HD \neq D$. Следующий результат обобщает [1, Cor. 4.25], где рассматривается частный случай аффинного X.

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть B-корневая подгруппа H на X такова, что $HD \neq D$ для некоторого дивизора $D \in \mathfrak{D}^B$. Тогда D либо G-инвариантен, либо является краской типа (T).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что D является краской одного из типов (U) или (N), и выберем минимальную параболическую подгруппу $Q \supset B$ с условием $QD \neq D$. Тогда, в обозначениях п. 2, орбита Qz распадается на две B-орбиты $O_1 = Bz$ и $O_2 = O \cap D$. Из обсуждения в [1, § 1.5] вытекает, что в этом случае множество Qz является H-инвариантным, причем каждая H-орбита в Qz изоморфна аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ и пересекает O_2 ровно в одной точке. Для каждой подгруппы $F \subset Q$ обозначим через $\tilde{F}$ ее образ в Q/Q_u, где Q_u – унипотентный радикал в Q. По аналогии с (1), морфизм

$$\varphi : Qz \simeq Q/Q_z \to Q/(Q_zQ_u) \simeq \tilde{Q}/\tilde{Q}_z \tag{2}$$

факторизации по Q_u индуцирует сохраняющую коразмерности биекцию между B-орбитами в Qz и $\tilde{B}$-орбитами в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$. Поскольку действия групп H и Q_u на Qz коммутируют, на многообразии $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ индуцируется нетривиальное действие группы H, нормализуемое действием группы $\tilde{B}$. В частности, в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ есть ровно две $\tilde{B}$-орбиты $\varphi(O_1)$ и $\varphi(O_2)$, а каждая H-орбита изоморфна $\mathbb{A}^1$ и пересекает $\varphi(O_2)$ ровно в одной точке. Далее мы рассмотрим случаи типов (U) и (N) по отдельности. Условие на каждый из этих типов переформулировано с учетом того, что группа $\bar{Q}$ получается факторизацией группы $\tilde{Q}$ по своему связному центру.

Тип (U): $\tilde{Q}_z$ содержит максимальную унипотентную подгруппу в $\tilde{Q}$. Тогда в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ найдется точка, неподвижная относительно унипотентного радикала $\tilde{B}_u$ группы $\tilde{B}$. Поскольку $\tilde{B}_u$ нормализуется группой $\tilde{B}$ и коммутирует с действием H, множество $\tilde{B}_u$-неподвижных точек в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ инвариантно относительно обеих групп $\tilde{B}$ и H, а значит, оно совпадает со всем $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$. Следовательно, $\tilde{B}_u$ действует на $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ тривиально – противоречие.

Тип (N): $\tilde{Q}_z$ содержит подгруппу $\tilde{Q}_z'$ индекса 2, являющуюся прообразом связной компоненты единицы в $\bar{Q}_z$. Тогда естественный морфизм $\psi : \tilde{Q}/\tilde{Q}_z' \to \tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ представляет собой неразветвленное двулистное накрытие. Более того, множество $\psi^{-1}(\varphi(O_1))$ является открытой $\tilde{B}$-орбитой в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z'$, а множество $\psi^{-1}(\varphi(O_2))$ распадается на две $\tilde{B}$-орбиты коразмерности 1, которые мы обозначим через D_1 и D_2. Пусть теперь $y = \varphi(z)$ и $\psi^{-1}(y) = \{y_1, y_2\}$. Так как $Hy \simeq \mathbb{A}^1$, то множество $\psi^{-1}(Hy)$ является несвязным объединением двух компонент Y_1 и Y_2, каждая из которых изоморфно отображается на Hy. Без ограничения общности будем считать, что $y_i \in Y_i$ при $i = 1, 2$. Пусть элемент $b \in \tilde{B}$ таков, что $by_1 = y_2$. Тогда $b \in \tilde{B}_z$ и, значит, $by_2 = y_1$. В силу $\tilde{B}$-инвариантности орбиты Hy получаем, что действие элемента b переставляет множества Y_1 и Y_2. С другой стороны, множество $\psi^{-1}(Hy \cap \varphi(O_2))$ состоит из двух точек, принадлежащих разным $\tilde{B}$-орбитам – противоречие.

В терминологии [1, § 4.2], B-корневая подгруппа H на X называется *вертикальной*, если она сохраняет открытую B-орбиту, и *горизонтальной* в противном случае. Если H горизонтальна и $HD \neq D$ для некоторого $D \in \mathfrak{D}^B$, то будем говорить, что H *двигает* D. В соответствии с предложением 1 горизонтальные B-корневые подгруппы можно разделить на два типа.

Определение 1. Пусть H — горизонтальная B-корневая подгруппа на X, и пусть дивизор $D \in \mathfrak{D}^B$ таков, что $HD \neq D$. Если $D \in \mathfrak{D}^G$, то назовем H *тороидальной*. Если D является краской типа (T), то назовем H *размывающей*.

4. Для всякого подмножества $\mathcal{F} \subset \mathfrak{D}$ положим $D_{\mathcal{F}} = \bigcup_{D \in \mathcal{F}} D$, $X_{\mathcal{F}} = X \backslash D_{\mathcal{F}}$ и обозначим через $P_{\mathcal{F}}$ стабилизатор в G множества $X_{\mathcal{F}}$. Тогда $P_{\mathcal{F}}$ — параболическая подгруппа в G, содержащая B. Ключевую роль в наших дальнейших рассмотрениях играет теорема о локальной структуре (см. [7, Thm. 2.3, Prop. 2.4], [8, Thm. 1.4]), которая в нашей ситуации формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathfrak{D}$ — произвольное подмножество и $P = L \leftthreetimes P_u$ — разложение Леви группы $P = P_{\mathcal{F}}$. Тогда существует замкнутое L-инвариантное подмногообразие $Z \subset X_{\mathcal{F}}$, для которого отображение $P_u \times Z \to X_{\mathcal{F}}$, заданное формулой $(p, z) \mapsto pz$, является P-эквивариантным изоморфизмом, где действие P на $P_u \times Z$ определяется по формуле $lu(p,z) = (lupl^{-1}, lz)$ для всех $l \in L$, $u, p \in P_u$, $z \in Z$. Более того, если P совпадает со стабилизатором открытой B-орбиты в X, то коммутант группы L действует на Z тривиально.*

Ниже нам также понадобится следующее наблюдение.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{F} = \mathfrak{D}$ или $\mathcal{F} = \mathfrak{D} \backslash \{D_0\}$, где D_0 — краска типа (T). Тогда группа $P_{\mathcal{F}}$ совпадает со стабилизатором открытой B-орбиты в X.*

Доказательство. В случае $\mathcal{F} = \mathfrak{D}$ утверждение очевидно, поэтому далее считаем $\mathcal{F} = \mathfrak{D} \backslash \{D_0\}$ для некоторой краски D_0 типа (T). Пусть $Q \supset B$ — произвольная минимальная параболическая подгруппа в G. Тогда условие $QD_0 \neq D_0$ может выполняться только в том случае, если $QD' \neq D'$ для некоторой краски $D' \in \mathfrak{D} \backslash \{D_0\}$. Значит, если $Q \subset P_{\mathcal{F}}$, то $QD_0 = D_0$. Поскольку $P_{\mathcal{F}}$ порождается как группа всеми содержащимися в ней минимальными параболическими подгруппами, мы получаем $P_{\mathcal{F}} D_0 = D_0$, откуда и следует требуемое.

5. С этого момента и до конца работы будем предполагать, что X — аффинное сферическое G-многообразие. Введем некоторые обозначения.

Зафиксируем максимальный тор $T \subset B$ и обозначим через $\mathfrak{X}(T)$ его решетку характеров. Пусть $\Delta \subset \mathfrak{X}(T)$ — система корней группы G относительно T и $\Lambda^+ \subset \mathfrak{X}(T)$ — моноид доминантных весов относительно B.

Пусть M (соответственно Γ) — решетка (соответственно моноид) весов B-полуинвариантных рациональных (соответственно регулярных) функций на X. В силу аффинности X имеем $M = \mathbb{Z}\Gamma$ (см., например, [5, Prop. 5.14]). Рассмотрим двойственную решетку $N = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ и соответствующее рациональное векторное пространство $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Естественное спаривание $N \times M \to \mathbb{Z}$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Поскольку в X есть открытая B-орбита, для каждого $\lambda \in M$ существует единственная с точностью до пропорциональности B-полуинвариантная рациональная функция f_λ на X веса λ. Потребовав, чтобы все такие функции принимали значение 1 в фиксированной точке открытой B-орбиты, будем считать, что $f_\lambda f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ для всех $\lambda, \mu \in M$. Каждый дивизор $D \in \mathfrak{D}^B$ определяет элемент $\varkappa(D) \in N$ по формуле $\langle \varkappa(D), \lambda \rangle = \operatorname{ord}_D(f_\lambda)$ для всех $\lambda \in M$. В силу нормальности многообразия X имеем

$$\Gamma = \{\lambda \in M \mid \langle \varkappa(D), \lambda \rangle \geq 0 \text{ для всех } D \in \mathfrak{D}^B\}. \quad (3)$$

В частности, множество $\{\varkappa(D) \mid D \in \mathfrak{D}^B\}$ порождает строго выпуклый конус в $N_{\mathbb{Q}}$.

Для каждого строго выпуклого конуса $\mathscr{C} \subset N_{\mathbb{Q}}$ обозначим через $\mathscr{C}^1$ множество примитивных элементов ρ решетки N, для которых луч $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho$ является гранью конуса $\mathscr{C}$. Для каждого $\rho \in \mathscr{C}^1$ определим множество

$$\mathfrak{R}_\rho(\mathscr{C}) = \{\mu \in M \mid \langle \rho, \mu \rangle = -1; \\ \langle \rho', \mu \rangle \geq 0 \text{ для всех } \rho' \in \mathscr{C}^1 \backslash \{\rho\}\}. \quad (4)$$

Элементы множества $\mathfrak{R}(\mathscr{C}) = \coprod_{\rho \in \mathscr{C}^1} \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{C})$ называются *корнями Демазюра* конуса $\mathscr{C}$. Положим

$$\Gamma(\mathscr{C}) = \{\lambda \in M \mid \langle x, \lambda \rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathscr{C}\} \quad (5)$$

и рассмотрим алгебру $A(\mathscr{C}) = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(\mathscr{C})} \mathbb{K} f_\lambda$. В дальнейшем нам понадобится следующий хорошо известный результат (см. [9, Thm. 2.7]), дающий описание всех T-нормализуемых ЛНД на алгебре $A(\mathscr{C})$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{C} \subset N_{\mathbb{Q}}$ — произвольный строго выпуклый конус.*

(a) *Множество весов всех T-нормализуемых ЛНД на $A(\mathscr{C})$ есть $\mathfrak{R}(\mathscr{C})$;*

(б) *Для каждого* $\rho \in \mathscr{C}^1$ *и каждого* $\mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{C})$ *существует единственное с точностью до пропорциональности T-нормализуемое ЛНД* ∂_μ *на* $A(\mathscr{C})$ *веса* μ*, задаваемое формулой*

$$\partial_\mu(f_\lambda) = \langle \rho, \lambda \rangle f_\lambda f_\mu \qquad (6)$$

для всех $\lambda \in \Gamma(\mathscr{C})$.

6. Пусть H – B-корневая подгруппа на X и $\mathscr{F}_H = \{D \in \mathfrak{D} \mid HD = D\}$. Тогда H сохраняет открытое подмножество $X_{\mathscr{F}_H} \subset X$ и тем самым определяет B-нормализуемое ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathscr{F}_H}]$. Заметим, что $\mathscr{F}_H = \mathfrak{D}$ в случае вертикальной или тороидальной H и $\mathscr{F}_H = \mathfrak{D} \setminus \{D_0\}$ в случае размывающей H, двигающей краску D_0 типа (T).

Пусть теперь $\mathscr{F} = \mathfrak{D}$ или $\mathscr{F} = \mathfrak{D} \setminus \{D_0\}$, где $D_0 \in \mathfrak{D}$ – краска типа (T). Наша цель в данном пункте – описать все B-нормализуемые ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathscr{F}}]$.

Применим теорему 1 и сохраним обозначения Z, L, P_u, используемые в этой теореме. Тогда имеется P-эквивариантный изоморфизм $X_{\mathscr{F}} \simeq P_u \times Z$, по которому мы будем отождествлять эти два многообразия в дальнейшем. Без ограничения общности будем считать, что $L \supset T$. В силу предложения 2 коммутант группы L действует тривиально на Z. Поскольку $X_{\mathscr{F}}$ содержит открытую B-орбиту, многообразие Z содержит открытую T-орбиту, которую мы обозначим через Z_0. Зафиксируем также произвольную точку $z_0 \in Z_0$. Обозначим через L_0 ядро действия группы L на Z и положим $T_0 = T \cap L_0$. Заметим, что M состоит в точности из всех характеров тора T, ограничение которых на T_0 тривиально.

Для всякого $\lambda \in M$ ограничение функции f_λ на подмногообразие Z является T-полуинвариантной рациональной функцией, которую мы будем обозначать тем же символом f_λ. Тогда $\mathbb{K}[Z] = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma_Z} \mathbb{K} f_\lambda$, где

$$\Gamma_Z = \{\lambda \in M \mid \langle \varkappa(D), \lambda \rangle \geq 0 \text{ для всех } D \in \mathfrak{D}^B \setminus \mathscr{F}\}. \qquad (7)$$

Без ограничения общности будем считать, что $f_\lambda(z_0) = 1$ для всех $\lambda \in M$.

Рассмотрим присоединенное представление группы L в пространстве $\mathfrak{p}_u = \operatorname{Lie} P_u$ и разложим $\mathfrak{p}_u$ в прямую сумму неприводимых L-инвариантных подпространств. Хорошо известно (см. [6, Thm. 0.1]), что все входящие в данное разложение слагаемые попарно неизоморфны как L-модули; пусть $\Omega \subset \Delta$ – множество старших весов этих слагаемых относительно борелевской подгруппы $B \cap L \subset L$. Для каждого $\alpha \in \Omega$ зафиксируем ненулевой вектор $e_\alpha \in \mathfrak{p}_u$ веса α. Действие группы P_u на себе умножениями справа индуцирует действие алгебры Ли $\mathfrak{p}_u$ на алгебре $\mathbb{K}[P_u]$; для каждого $\alpha \in \Omega$ обозначим через δ_α дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[P_u]$, определяемое действием элемента e_α. Это дифференцирование B-инвариантно веса α, автоматически локально нильпотентно и соответствует действию группы $\{\exp(te_\alpha) \mid t \in \mathbb{K}\}$ на P_u умножениями справа. Будем рассматривать δ_α как ЛНД на всей алгебре $\mathbb{K}[P_u \times Z] \simeq \mathbb{K}[P_u] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z]$, полагая $\delta_\alpha(\mathbb{K}[Z]) = 0$.

Для каждого характера $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ положим

$$\begin{aligned} \Omega_\mu &= \{\alpha \in \Omega \mid \mu|_{T_0} = \alpha|_{T_0}\}; \\ \Omega_\mu^0 &:= \{\alpha \in \Omega_\mu \mid \mu - \alpha \in \Gamma_Z\}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Отметим, что условие $\mu|_{T_0} = \alpha|_{T_0}$ равносильно $\mu - \alpha \in M$.

Т е о р е м а 3. *Всякое B-нормализуемое ЛНД веса* μ *на алгебре* $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ *имеет вид*

$$\sum_{\alpha \in \Omega_\mu^0} c_\alpha f_{\mu-\alpha} \delta_\alpha + \partial_Z, \qquad (9)$$

где $c_\alpha \in \mathbb{K}$ *и* ∂_Z *– некоторое T-нормализуемое ЛНД веса* μ *на* $\mathbb{K}[Z]$, *продолженное тривиально на* $\mathbb{K}[P_u]$. *Обратно, всякое дифференцирование на* $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ *указанного вида является B-нормализуемым веса* μ *и локально нильпотентным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ∂ – B-нормализуемое ЛНД веса μ на $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, и пусть ∂_Z – ограничение ∂ на подалгебру $\mathbb{K}[Z]$. Далее будем рассматривать ∂_Z как дифференцирование на всей алгебре $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, полагая $\partial_Z(\mathbb{K}[P_u]) = 0$. Продолжение дифференцирования $\partial - \partial_Z$ на алгебру $\mathbb{K}[P_u \times Z_0]$ задает B-полуинвариантное веса μ векторное поле ξ на гладком многообразии $P_u \times Z_0$. Поскольку группа B действует на $P_u \times Z_0$ транзитивно, ξ однозначно определяется своим значением v в точке (e, z_0), где $e \in P_u$ – единичный элемент. Так как $\partial - \partial_Z$ действует тривиально на $\mathbb{K}[Z_0]$, то v является $B \cap L_0$-полуинвариантным вектором в $\mathfrak{p}_u$ веса $\mu|_{T_0}$, а значит, $v = \sum_{\alpha \in \Omega_\mu} c_\alpha e_\alpha$ для некоторых $c_\alpha \in \mathbb{K}$. С другой стороны, заметим, что дифференцирование $\sum_{\alpha \in \Omega_\mu} c_\alpha f_{\mu-\alpha} \delta_\alpha$ на $\mathbb{K}[Z_0]$ также B-полуинвариантно веса μ и соответствует тому же касательному вектору в точке (e, z_0), потому оно совпадает с $\partial - \partial_Z$. Поскольку данное дифференцирование сохраняет алгебру $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, должно выполняться $c_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \Omega_\mu$ с условием $\mu - \alpha \notin \Gamma_Z$, что и доказывает первое утверждение.

Пусть теперь ∂ — дифференцирование на $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ вида (9). Тогда ∂ автоматически B-нормализуемо веса μ, и нам остается проверить, что ∂ локально нильпотентно. Поскольку $\mathbb{K}[P_u]$ является рациональным P_u-модулем (относительно действия справа), достаточно проверить локальную нильпотентность ∂ на произвольном подпространстве вида $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z]$, где $V \subset \mathbb{K}[P_u]$ — конечномерное P_u-инвариантное подпространство. Так как образ алгебры $\mathfrak{p}_u$ в $\mathfrak{gl}(V)$ нильпотентен, то в V существует флаг подпространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_s = V \tag{10}$$

со свойством $\mathfrak{p}_u V_i \subset V_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Отсюда следует, что для всех $i = 1, \ldots, s$, $g \in V_i$ и $f \in \mathbb{K}[Z]$ имеем

$$\begin{aligned}\partial(gf) = \sum_{\alpha \in \Omega_\mu^0} c_\alpha \delta_\alpha(g) f_{\mu-\alpha} f + g\partial_Z(f) \in \\ \in g\partial_Z(f) + V_{i-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z],\end{aligned} \tag{11}$$

поскольку $\delta_\alpha(g) = e_\alpha g \in V_{i-1}$ для всех $\alpha \in \Omega$. Так как ∂_Z — ЛНД на $\mathbb{K}[Z]$, то получаем $\partial^k(gf) \in V_{i-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z]$ для некоторого $k > 0$. Доказательство завершается применением индукции по i.

7. Сохраним предположения и обозначения предыдущего пункта. Теперь изучим вопрос, когда B-нормализуемое ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ сохраняет подалгебру $\mathbb{K}[X]$ и тем самым определяет B-корневую подгруппу на всем многообразии X. Пусть $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ — произвольный оператор проектирования пространства $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ на подпространство $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Пусть также $\mathscr{E}_Z \subset N_{\mathbb{Q}}$ — конус, порожденный множеством $\{\varkappa(D) \mid D \in \mathscr{D}^B \setminus \mathscr{F}\}$, так что $\Gamma_Z = \Gamma(\mathscr{E}_Z)$ в силу (7) и $\mathbb{K}[Z] = A(\mathscr{E}_Z)$ (см. обозначения в п. 5).

Т е о р е м а 4. *Существует набор констант* $\{C_D \mid D \in \mathscr{F}\}$ *со следующим свойством*: *если* $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ *и* $\langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle \ge C_D$ *для всех* $D \in \mathscr{F}$, *то всякое* B-*нормализуемое ЛНД на* $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ *веса* μ *сохраняет* $\mathbb{K}[X]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F_1, \ldots, F_k$ — фиксированная система порождающих алгебры $\mathbb{K}[X]$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ имеем $F_i = \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} f_{\lambda_{ij}}$ для некоторых функций $g_{ij} \in \mathbb{K}[P_u]$ и весов $\lambda_{ij} \in \Gamma_Z$. Если ∂ — произвольное дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, то ∂ сохраняет $\mathbb{K}[X]$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ord}_D(\partial(F_i)) \ge 0$ для всех $D \in \mathscr{F}$ и $i = 1, \ldots, k$.

Чтобы подобрать требуемый набор констант, в силу теоремы 3 для каждого веса $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ достаточно потребовать, чтобы каждое слагаемое в сумме (9) сохраняло $\mathbb{K}[X]$.

Для всех $D \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, k$ и $\alpha \in \Omega_\mu^0$ при $\delta_\alpha(F_i) \ne 0$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_D(f_{\mu-\alpha}\delta_\alpha(F_i)) = \operatorname{ord}_D(f_{\mu-\alpha}) + \operatorname{ord}_D(\delta_\alpha(F_i)) = \\ = \langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle - \langle \nu_D, \overline{\alpha} \rangle + \operatorname{ord}_D(\delta_\alpha(F_i)).\end{aligned} \tag{12}$$

Если $\partial_Z \ne 0$, то по теореме 2 имеем $\mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{E}_Z)$ для некоторого $\rho \in \mathscr{E}_Z^1$ (в частности, $\mu \in M$ и $\overline{\mu} = \mu$) и существует такая ненулевая константа $c \in \mathbb{K}$, что $\partial_Z(f_\lambda) = c\langle \rho, \lambda \rangle f_\lambda f_\mu$ для всех $\lambda \in \Gamma_Z$. Тогда для всех $D \in \mathscr{F}$ и $i = 1, \ldots, k$ при $\partial_Z(F_i) \ne 0$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_D(\partial_Z(F_i)) = \operatorname{ord}_D\left(\sum_{j=1}^{n_i} \langle \rho, \lambda_{ij} \rangle g_i f_{\lambda_{ij}} f_\mu\right) = \\ = \langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle + \operatorname{ord}_D\left(\sum_{j=1}^{n_i} \langle \rho, \lambda_{ij} \rangle g_i f_{\lambda_{ij}}\right) \ge \\ \ge \langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle + \min\{\operatorname{ord}_D(g_i f_{\lambda_{ij}}) \mid j = 1, \ldots, n_i\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Остается заметить, что все выражения в (12) и (13) будут неотрицательны при подходящем выборе искомых констант.

8. Выведем несколько следствий из теорем 3 и 4.

С л е д с т в и е 1. *Все* B-*нормализуемые ЛНД на* $\mathbb{K}[X]$ *одного веса образуют конечномерное векторное пространство над* $\mathbb{K}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [1, Prop. 4.22] любые две горизонтальных B-корневых подгруппы на X одного и того же веса μ двигают один и тот же дивизор $D \in \mathscr{D}^B$. Следовательно, в условиях п. 6 можно подобрать такое подмножество $\mathscr{F} \subset \mathscr{D}$, что все B-корневые подгруппы на X веса μ сохраняют $X_{\mathscr{F}}$. По теоремам 3 и 2 все B-нормализуемые ЛНД на $\mathbb{K}[X_{\mathscr{F}}]$ веса μ образуют конечномерное векторное пространство. Условие сохранения подалгебры $\mathbb{K}[X]$ выделяет подпространство в данном векторном пространстве.

Пусть $\mathscr{E} \subset N_{\mathbb{Q}}$ — конус, порожденный множеством $\{\varkappa(D) \mid D \in \mathscr{D}^B\}$, так что $\Gamma = \Gamma(\mathscr{E})$ в силу (3).

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $D \in \mathscr{D}^B$, *причем либо* $D \in \mathscr{D}^G$, *либо* D *является краской типа* (T). *Предположим, что существует элемент* $\rho \in \mathscr{E}^1$ *с условиями* $\varkappa(D) \in \mathbb{Q}_{\ge 0}\rho$ *и* $\varkappa(D') \notin \mathbb{Q}_{\ge 0}\rho$ *для всех* $D' \in \mathscr{D}^B \setminus \{D\}$. *Тогда существует* B-*корневая подгруппа на* X, *двигающая* D.

Доказательство. Положим $\mathscr{F} = \mathscr{D}$ при $D \in \mathscr{D}^G$ и $\mathscr{F} = \mathscr{D}\backslash\{D\}$ иначе. Сохраним обозначения пп. 6 и 7. Поскольку $\rho \in \mathscr{E}_Z$ и $\mathscr{E}_Z \subset \mathscr{E}$, имеем $\rho \in \mathscr{E}^1_Z$. Выберем любой элемент $\mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{E}_Z)$ и рассмотрим B-нормализуемое ЛНД ∂_μ на $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ веса μ, действующее тривиально на $\mathbb{K}[P_u]$ и по формуле (6) на $\mathbb{K}[Z]$. Из условия следует, что существует вес $\lambda \in \Gamma$ со свойствами $\langle \rho, \lambda \rangle = 0$ и $\langle \varkappa(D'), \lambda \rangle > 0$ для всех $D' \in \mathscr{F}$. Тогда для всех целых $N > 0$ имеем $N\lambda + \mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{E}_Z)$. По теореме 4 найдется такое значение N_0, что при всех $N \geq N_0$ ЛНД $\partial_{N\lambda+\mu} = f_{N\lambda}\partial_\mu$ сохраняет подалгебру $\mathbb{K}[X]$ и тем самым определяет B-корневую подгруппу на X. Эта B-корневая подгруппа двигает D в силу [1, Prop. 4.22].

Ввиду [1, Prop. 3.9] всякий дивизор $D \in \mathscr{D}^G$ автоматически удовлетворяет условию следствия 2. Отсюда вытекает следующий результат, который был сформулирован в качестве гипотезы в [1, Conj. 4.29].

Следствие 3. *Для всякого $D \in \mathscr{D}^G$ существует B-корневая подгруппа на X, двигающая D.*

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа Р.С. Авдеева была поддержана грантом Российского научного фонда № 22-41-02019. Работа В.С. Жгуна выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по проекту № FNEF-2022-0011, а также в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arzhantsev I., Avdeev R.* Root subroups on affine spherical varieties. 2021. Preprint arXiv:2012.02088v2
2. *Knop F.* On the set of orbits for a Borel subgroup // Comment. Math. Helv. 1995. V. 70. № 2. P. 285–309.
3. *Brion M.* On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties // Comment. Math. Helv. 2001. V. 76. № 2. P. 263–299.
4. *Luna D.* Grosses cellules pour les variétés sphériques. In: Algebraic Groups and Lie Groups. Austral. Math. Soc. Lect. Ser. 9. Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1997. P. 267–280.
5. *Timashev D.A.* Homogeneous spaces and equivariant embeddings. Encycl. Math. Sci. V. 138. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
6. *Kostant B.* Root systems for Levi factors and Borel-de Siebenthal theory. In: Symmetry and spaces. Birkhauser Boston, 2010. P. 129–152.
7. *Knop F.* The asymptotic behavior of invariant collective motion // Invent. Math. 1994. V. 116. № 1. P. 309–328.
8. *Brion M., Luna D., Vust Th.* Espaces homogénes sphériques // Invent. Math. 1986. V. 84. № 3. P. 617–632.
9. *Liendo A.* Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations // Transform. Groups. 2010. V. 15. № 2. P. 389–425.

ON THE EXISTENCE OF *B*-ROOT SUBGROUPS ON AFFINE SPHERICAL VARIETIES

R. S. Avdeev[a] and V. S. Zhgoon[a,b]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[b] *Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov

Let X be an irreducible affine algebraic variety that is spherical with respect to the action of a connected reductive group G. In this paper we provide sucient conditions, formulated in terms of weight combinatorics, for the existence of one-parameter additive actions on X normalized by a Borel subgroup. As an application, we prove that every G-stable prime divisor in X can be connected with the open G-orbit by means of a suitable B-normalized one-parameter additive action.

Keywords: additive group action, toric variety, spherical variety, Demazure root, locally nilpotent derivation, local structure theorem