ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 26–29

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. Е. А. Бадерко[1,*], С. И. Сахаров[1,]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 11.01.2022 г.
Поступило 19.01.2022 г.
После доработки 19.01.2022 г.
Принято к публикации 22.01.2022 г.

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для параболических по Петровскому систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини в плоских областях с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, “клювы”. Доказаны теоремы о единственности классических решений этих задач в классе функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своими пространственными производными первого порядка, в замыкании указанных областей.

Ключевые слова: параболическая система, начально-краевая задача, единственность классического решения, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S2686954322020060

Рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных по пространственной переменной, параболических по Петровскому (см. [1]), систем второго порядка в областях с негладкими, вообще говоря, боковыми границами из класса Дини–Гёльдера. Коэффициенты систем удовлетворяют условию Дини. В [2–4] получены теоремы о существовании и свойствах классических решений таких задач. В настоящей работе устанавливается единственность классических решений этих начально-краевых задач в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своими пространственными производными первого порядка, вплоть до границ указанных областей. В случае областей с гладкими боковыми границами для систем с гёльдеровыми коэффициентами однозначная разрешимость рассматриваемых задач в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, следует из [5] (см. также [6, с. 706–707]). Если боковые границы областей негладкие, то в случае одного уравнения единственность решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [7]), а единственность решения второй начально-краевой задачи получена в [8, 9] с помощью теоремы о знаке косой производной. Заметим, что для систем не имеет места, вообще говоря, принцип максимума (см. [10]). В [11] установлена единственность решений первой и второй начально-краевых задач для одномерных по пространственной переменной параболических систем второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами в ограниченной области Ω с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$. В [12] доказана единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной плоской области с боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ этого решения и на характер его гладкости по временной переменной. Здесь ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже (2)). Заметим, что, как следует из работ [13, 14], такое условие на характер непрерывности боковой границы является точным для классической разрешимости первой начально-краевой задачи в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

**E-mail: baderko.ea@yandex.ru*

***E-mail: ser341516@yandex.ru*

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\}$, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно параболический матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u,$$
$$u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}, \quad m > 1,$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$ – матрицы размерности $m \times m$, элементы которых есть вещественные функции, определенные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенству $\mathrm{Re}\mu_r \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \bar{D}$, $r = 1, \ldots, m$,

(b) $|a_{ijl}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_{ijl}(x,t)| \leq \omega_0(|\Delta x|) + \omega_0(|\Delta t|^{1/2})$, $(x+\Delta x, t+\Delta t), (x,t) \in \bar{D}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $l = 0, 1, 2$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \xi^{-1}\omega_0(\xi)d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

В полосе D выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D$: $x > g(t)\}$ с боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{D}$: $x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию:

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2}\, \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{1}$$

ω_1 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини

$$\tilde{\omega}_1(z) = \int_0^z \xi^{-1}\omega_1(\xi)d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{2}$$

В области Ω ставится задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad x \geq g(0), \tag{4}$$

и одному из граничных условий

$$u(g(t),t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

или

$$\partial_x u(g(t),t) = \theta(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Определим следующие функциональные пространства. Через $\underset{0}{C}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, непрерывных на $[0, T]$, для которых $\psi(0) = 0$, с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0 = \max\limits_{[0,T]}|\psi|$. Здесь и далее для любого вектора b под $|b|$ понимаем максимум из модулей компонент b. Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Следуя [15], положим

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T]\colon \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T],$$
$$\|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < +\infty\}.$$

Через $\underset{0}{C}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций u: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, для которых $u(x,0) = 0$, с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{\Omega}|u|$. Положим $\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega}) : \partial_x u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega})$, $\|u;\Omega\|^{1,0} = \|u;\Omega\|^0 + \|\partial_x u;\Omega\|^0\}$. Под значениями вектор-функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Существование классических решений задач (3)–(5) и (3), (4), (6) при сформулированных условиях на коэффициенты системы и боковую границу области установлено в [4] и [2] соответственно, если граничные функции $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\theta \in \underset{0}{C}[0,T]$. В этих работах решения указанных задач получены в виде векторных параболических потенциалов простого слоя. Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (1). *Пусть* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ *– классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \partial_x u|_{\Sigma} = 0.$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (1). *Пусть* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\Omega)$ *– классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Sigma} = 0.$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Замечание (см. [13, 14]). Если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0, T]$, причем ω_1 не удовлетворяет условию (2), то классическое решение $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ задачи (3)–(5) может не существовать.

Для доказательства теоремы 1 сначала, используя результат, полученный в [12], и метод работы [11], получаем теорему о единственности решения второй начально-краевой задачи в случае

параболического оператора с дифференцируемыми коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\text{(c)}\ \left|\partial_x^k a_{ijl}(x+\Delta x, t+\Delta t) - \partial_x^k a_{ijl}(x,t)\right| \le$$
$$\le \omega_0(|\Delta x|) + \omega_0(|\Delta t|^{1/2}),$$
$$(x+\Delta x, t+\Delta t), \quad (x,t) \in \bar{D},$$
$$i, j = 1, \ldots, m, \quad l = 0, 1, 2, 0 \le k \le l.$$

Затем рассматриваем оператор со "сглаженными" коэффициентами, зависящими от параметра r,

$$L^{(r)}u = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l^{(r)}(x,t)\partial_x^l u,$$

где $A_l^{(r)} = \left\|a_{ijl}^{(r)}\right\|_{i,j=1}^m$. Коэффициенты оператора $L^{(r)}$ получаются стандартным образом с помощью свертки с гладкой функций ("шапочкой"). Для достаточно малых r коэффициенты оператора $L^{(r)}$ удовлетворяют равномерно по r условию (a) с постоянной параболичности $\delta/2$ и условию (b) (см. [16]). Кроме того, $a_{ijl}^{(r)} \to a_{ijl}$ при $r \to 0$ равномерно на любом компакте из $\bar{D}$.

Далее доказываем теорему 1. Фиксируем произвольно точку $(x_0, t_0) \in \Omega$ и число $\varepsilon > 0$. Рассматриваем область $\Omega_d = \{(x,t) \in \Omega : x > g(t) + d, d < t < T - d\}$ такую, что $(x_0, t_0) \in \Omega_d$ при достаточно малом $d \in (0, T/2)$. Пусть $\bar{u}$ – продолжение вектор-функции u с $\bar{\Omega}$ на $\mathbb{R}^2$ с сохранением класса гладкости $C^{1,0}$ (см. [6, с. 342]), причем такое, что $\bar{u}(x,0) = \partial_x \bar{u}(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Функцию $\bar{u}$ "сглаживаем" таким же способом, как и коэффициенты системы, и получаем гладкие вектор-функции u_s такие, что $u_s(x,t) \to u(x,t)$, $s \to 0$, равномерно на любом компакте из $\bar{\Omega}$. Пусть $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функция ("срезка") со следующими свойствами:

$$0 \le \zeta_R(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \zeta_R \equiv 1,$$
$$|x| \le R, \quad \zeta_R \equiv 0, \quad |x| \ge 2R,$$
$$\left|\frac{d^l \zeta_R}{dx^l}(x)\right| \le CR^{-l}, \quad l = 1, 2,$$

где число $R \ge R_0 = \max(2|x_0|, 1)$. Полагаем $u_{s,R}(x,t) = u_s(x,t)\zeta_R(x)$. Для любых $0 < s < d/2$, $r > 0$ и $R \ge R_0$ вектор-функция $u_{s,R}$ является решением задачи

$$L^{(r)}v = f_{s,R}^{(r)} \quad \text{в} \quad \Omega_d, \quad v(x,d) = h_{s,R,d}(x),$$
$$x \ge g(d) + d,$$
$$\partial_x v(g(t)+d, t) = \theta_{s,R,d}(t), \quad t \in [d, T-d],$$

где $f_{s,R}^{(r)}(x,t) = L^{(r)}u_{s,R}(x,t)$, $h_{s,R,d}(x) = u_{s,R}(x,d)$, $\theta_{s,R,d}(t) = \partial_x u_{s,R}(g(t)+d, t)$. Из работы [2] в силу установленной выше единственности решения второй начально-краевой задачи в случае параболического оператора с дифференцируемыми коэффициентами и свойств векторных параболических потенциалов следует, что для любых $0 < s < d/2$ и $R \ge R_0$ вектор-функцию $u_{s,R}$ можно представить в виде суммы потенциала Пуассона, объемного потенциала и потенциала простого слоя, последовательно оценивая которые, получаем, что найдутся достаточно большое $R > R_0$ и достаточно малые $d = d(R) > 0$, $s_0 = s_0(d,R) > 0$, $r = r(d,R) > 0$ такие, что $|u_{s,R}(x,t)| < \varepsilon/2$ для любого $s \le s_0$ и, в частности, $|u_s(x_0,t_0)| < \varepsilon/2$. Отсюда, учитывая, что $|u_s(x_0,t_0) - u(x_0,t_0)| < \varepsilon/2$ для достаточно малого $s > 0$, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы 1.

Используя результаты работы [4] и теорему 1, доказываем затем теорему 2.

В случае ограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D: g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с боковыми границами $\Sigma_s = \{(x,t) \in \bar{D}: x = g_s(t)\}$, $s = 1, 2$, удовлетворяющими условиям

$$\begin{gathered}|g_s(t+\Delta t) - g_s(t)| \le |\Delta t|^{1/2}\,\omega_1(|\Delta t|^{1/2}),\\ s = 1, 2, \quad g_1(t) < g_2(t), \quad t, t+\Delta t \in [0,T],\end{gathered} \tag{7}$$

где модуль непрерывности ω_1 удовлетворяет условию (2), справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (7). *Пусть* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ *– классическое решение системы*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \le x \le g_2(0),$$

и одной из трех пар граничных условий

$$u(g_s(t), t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad s = 1, 2,$$

или

$$\partial_x u(g_s(t), t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad s = 1, 2,$$

или

$$u(g_1(t), t) = 0, \quad \partial_x u(g_2(t), t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Утверждение теоремы 3 получаем, следуя методу из [6, с. 361], используя "разбиение единицы", как следствие из теорем 1, 2 настоящей работы и теоремы о единственности решения задачи Коши для систем с Дини-непрерывными коэффициентами (см. [16]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность академику РАН Е.И. Моисееву и проф. И.С. Ломову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ, секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
2. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини / Дисс. ... к.ф.-м.н. М., 1992.
3. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
4. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т. 83. Ч. 3.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
7. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
8. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
9. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журнал. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
10. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифф. уравн. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
12. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной негладкой плоской области // Дифф. уравн. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
13. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // ДАН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
14. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
15. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифф. уравн. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
16. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифф. уравн. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.

UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC SYSTEMS WITH DINI-CONTINUOUS COEFFICIENTS IN DOMAINS ON THE PLANE

E. A. Baderko[a] and S. I. Sakharov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

The first and second initial-boundary value problems for Petrovsky parabolic systems of the second order with coefficients satisfying the Dini condition in domains on the plane with nonsmooth lateral boundaries, admitting, in particular, “beaks”, are considered. Theorems on the uniqueness of classical solutions of these problems in the class of functions that are continuous and bounded together with their first-order spatial derivative in the closure of these domains are proved.

Keywords: parabolic system, initial boundary value problem, uniqueness of the classical solution, nonsmooth lateral boundary, boundary integral equations