ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 30–32

МАТЕМАТИКА

УДК 519.147

О ПОКРЫТИИ ТОРА КУБАМИ

© 2022 г. И. И. Богданов[1,*], О. Р. Григорян[2], М. Е. Жуковский[1]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.12.2021 г.
Поступило 06.01.2022 г.
После доработки 06.01.2022 г.
Принято к публикации 09.02.2022 г.

Мы получили новые оценки и точные значения наименьшего количества кубов со стороной $\varepsilon \in (0, 1)$, покрывающих тор $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}]^3$.

Ключевые слова: покрытие кубами, тор, параллельный перенос
DOI: 10.31857/S2686954322020072

1. ИСТОРИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ задача состоит в нахождении минимального количества $\mu(d;\varepsilon)$ кубов $A_1, \ldots, A_\mu$, со стороной ε, покрывающих тор $T^d := [\mathbb{R}/\mathbb{Z}]^d$. Как обычно, под кубом со стороной ε подразумевается множество вида $\{(x_1, \ldots, x_d): x_i \in [x_i^0, x_i^0 + \varepsilon]\}$, а под покрытием – такой набор множеств $A_1, \ldots, A_\mu$, что $A_1 \cup \ldots \cup A_\mu = T^d$. Известно [1], что для всех d и ε справедливо

$$\mu(d;\varepsilon) \geq \lceil 1/\varepsilon \rceil^{(d)}, \tag{1}$$

где $\lceil x \rceil^{(i)} = \lceil x \lceil x \rceil^{(i-1)} \rceil$ и $\lceil x \rceil^{(1)} = \lceil x \rceil$. Довольно широко изучен случай растущей размерности d. Заметим, что ((1)) влечет $\mu(d;\varepsilon) \geq (1/\varepsilon + o(1))^d$. Из общего результата Эрдеша и Роджерса о покрытиях [2] следует, что $1/\varepsilon$ – правильное основание экспоненты, т.е. $\mu(d;\varepsilon) = (1/\varepsilon + o(1))^d$. Точнее Эрдеш и Роджерс доказали, что $\mu(d;\varepsilon) = O(d \log d (1/\varepsilon)^d)$. Для дискретного тора $T^d = [\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}]^d$, покрываемого кубами со стороной $s \in \{1, \ldots, t\}$, с помощью вероятностного метода нетрудно (см., например, [3]) улучшить эту оценку, убрав логарифмический множитель (здесь подразумевается, что $\varepsilon = s/t$). Нам удалось показать (см. лемму 3 и лемму 3), что дискретная и непрерывная постановка эквивалентны. Тем самым, $\mu(d;\varepsilon) = O(d(1/\varepsilon)^d)$ (как для рациональных, так и для иррациональных ε). Отметим, что из нижней оценки (1) следует лишь $\mu(d;\varepsilon) = \Omega((1/\varepsilon)^d)$.

Что касается малых значений размерности d, то нам известна лишь работа [1], в которой доказано, что при $d = 2$ нижняя оценка (1) точна, т.е. $\mu(2;\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil$.

Мы изучаем случай $d = 3$. Так как $\mu(1;\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ и $\mu(2;\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil$, то

$$\lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil \rceil \leq \mu(3;\varepsilon) \leq \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil \lceil 1/\varepsilon \rceil. \tag{2}$$

Заметим, что в размерности 3 нижняя оценка уже не является точной. Так, например, как замечено в [1], $\mu(3;3/7) > \lceil 7/3 \lceil 7/3 \lceil 7/3 \rceil \rceil \rceil$. Нам удалось найти точное значение $\mu(3;\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \geq 7/15$ и при ε, близких к $1/r$, $r \in \mathbb{N}$.

Отметим напоследок, что при $\varepsilon = 2/r$, $r \in \mathbb{N}$, соответствующая задача об упаковке (т.е. нахождение минимального количества $\nu(d;\varepsilon)$ непересекающихся кубов со стороной ε в T^d) связана с нахождением емкости Шеннона $c(C_r)$ простого цикла на r вершинах [4], а именно, справедливо равенство $c(C_r) = \sup_{d \geq 1}(\nu(d;2/r))^{1/d}$ (аналогичная связь имеется и при всех других рациональных ε, но соответствующие графы сложнее описать). Для четного r, очевидно, $c(C_r) = r/2$. Если же r нечетно, то значение емкости Шеннона известно лишь при $r = 5$: $c(C_5) = \sqrt{5}$ [5].

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
**e-mail: zhukmax@gmail.com*

2. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сперва $\varepsilon \geq 1/2$.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\mu(3;\varepsilon) = 8, \quad \varepsilon \in [1/2, 2/3), \quad \mu(3;\varepsilon) = 5,$$
$$\varepsilon \in [2/3, 3/4), \quad \mu(3;\varepsilon) = 4, \quad \varepsilon \in [3/4, 1).$$

Заметим, что при $\varepsilon \in [1/2, 1)$ величина $\mu(3;\varepsilon)$ равна своей нижней оценке в (2) тогда и только тогда, когда $\varepsilon \in [1/2, 4/7) \cup [2/3, 1)$.

Так как при целых $r \geq 2$ и $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r - 1/r^2}\right)$ нижняя и верхняя оценка в (2) совпадают, то, очевидно, $\mu(3;\varepsilon) = r^3$. Мы также нашли такую левую окрестность $1/r$, что при всех ε из этой окрестности нижняя оценка точна. Заметим, что при таких ε разность между верхней и нижней оценкой, наоборот, велика.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r + 1/(r^2 + r + 1)}, \frac{1}{r}\right)$. *Тогда* $\mu(3;\varepsilon) = r^3 + r^2 + r + 1$.

Кроме того, мы расширили упомянутую правую окрестность.

Теорема 3. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число,* $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r}, \frac{r^2 - 1}{r^3 - r - 1}\right)$. *Тогда* $\mu(3;\varepsilon) = r^3$.

В некоторых случаях нам удалось усилить нижнюю оценку в (2).

Теорема 4. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число, а* $\xi \in \{1, \ldots, r\}$ *таково, что*

$$\xi^2 \leq \xi + (r+1)\left\lfloor \frac{\xi^2}{r+1} \right\rfloor.$$

Пусть, кроме того,

1) $s = r^2 + r + \xi$,

2) $t = r^3 + r^2 + 2\xi r + \left\lfloor \frac{\xi^2}{r+1} \right\rfloor$ *взаимно просто с* s.

Тогда $\mu\left(3; \frac{s}{t}\right) \geq t + 1$.

Заметим, что так как условие $\xi^2 \leq \xi + (r + 1)\left\lfloor \frac{\xi^2}{r+1} \right\rfloor$ влечет, что либо $\xi \geq \sqrt{r+1}$, либо $\xi = 1$, то в интервале $[1/3, 1/2)$ найдутся только два таких значения $\frac{s}{t} \in \left\{\frac{7}{16}, \frac{8}{21}\right\}$.

Наконец, в некоторых случаях нам удалось усилить и верхнюю оценку в (2).

Теорема 5. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число,* $\xi \in \{1, \ldots, r\}$. *Пусть, кроме того,*

1) $s = r^2 + r + \xi$,

2) $t = r^3 + r^2 + \xi(r+1)$.

Тогда $\mu\left(3; \frac{s}{t}\right) \leq t$.

Для доказательства полученных результатов мы установили, что задача нахождения $\mu(d;\varepsilon)$ сводится к своему дискретному аналогу — к задаче нахождения минимального количества кубов со стороной s, покрывающих $[\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}]^d$ для некоторых s, t таких, что s/t близко к ε. Таким образом, эти вспомогательные утверждения влекут, что задача сводится к рассмотрению счетного множества значений ε, причем количество таких значений в каждом интервале вида $[1/r, 1/(r-1)]$ конечно.

3. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОМУ СЛУЧАЮ

Лемма 1. *Существует такая бесконечная последовательность рациональных чисел* $1 > \frac{s_1}{t_1} > \frac{s_2}{t_2} > \ldots > 0$, *что для каждого* $i \in \mathbb{N}$ *справедливо* $t_i \leq \mu\left(d; \frac{s_i}{t_i}\right)$ *и* $\mu(d;\varepsilon) = \mu\left(d; \frac{s_i}{t_i}\right)$ *для всех* $\varepsilon \in \left[\frac{s_i}{t_i}, \frac{s_{i-1}}{t_{i-1}}\right)$, *где* $s_0 = t_0 = 1$.

Из (2) несложно заметить, для каждого $r \geq 2$ для решения задачи для всех ε в интервале $\left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}\right)$ достаточно рассмотреть не более $\frac{r^2(r^3+1)}{2(r-1)} + r^3$ различных значений ε.

Пусть $s \leq t$ — натуральные числа. Пусть $\mu_0(d; s, t)$ — наименьшее количество кубов со стороной, состоящей из s точек, покрывающих тор $[\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}]^d$.

Лемма 2. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число,* $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}\right)$. *Пусть, кроме того,* $\frac{s}{t} \leq \varepsilon$ *— ближайшее к* ε *рациональное число с* $t \leq r^d$. *Тогда* $\mu(d;\varepsilon) = \mu_0(d; s, t)$.

4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

При $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ точные значения $\mu(3;\varepsilon)$ приведены в теореме 2. Перечислим точные результаты и некоторые оценки, которые влекут теоремы 2, 3, 4, 5 и лемма 1 для $\varepsilon \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$:

- при $\varepsilon \in \left[\frac{1}{3}, \frac{8}{23}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon)' = 27$;

- при $\varepsilon \in \left[\frac{8}{21}, \frac{5}{13}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) \in [22, 24]$;
- при $\varepsilon \in \left[\frac{7}{16}, \frac{4}{9}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) \in [17, 21]$;
- при $\varepsilon \in \left[\frac{4}{9}, \frac{7}{15}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) \in [16, 18]$;
- при $\varepsilon \in \left[\frac{7}{15}, \frac{1}{2}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) = 15$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-10092.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mceliece R.J., Taylor H.* Covering Tori with Squares // J. Combinatorial Theory Ser. A. 1973. V. 14. P. 119–124.
2. *Erdös P., Rogers C.A.* Covering space with convex bodies // Acta Arithmetica. 1962. V. 7. P. 281–285.
3. *Bollobás B., Janson S., Riordan O.* On covering by translates of a set // Random Structures & Algorithms. 2011. V. 38. № 1-2. P. 33–67.
4. *Brouwer A.E., Schrijver A.* Uniform hypergraphs // In: Packing and Covering in Combinatorics, A. Schrijver (Ed.), Math. Centre Tracts. № 106ю Mathematisch Centrum, Amsterdam. 1979. P. 39–73.
5. *Lovász L.* On the Shannon capacity of a graph // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25 P. 1–7.

ON COVERINGS OF TORI WITH CUBES

I. I. Bogdanov[a], O. R. Grigoryan[b], and M. E. Zhukovskii[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russia*

[b] *National research university "Higher School of Economics", Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We obtain new bounds as well as exact values of the minimum number of cubes with side $\varepsilon \in (0, 1)$ covering the torus $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}]^3$.

Keywords: covering with cubes, torus, translation