ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 33–39

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954.517.982

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ВЯЗКОЙ МГД–СРЕДЫ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ КОНФУЗОРА

© 2022 г. Р. Р. Булатова[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 02.06.2021 г.
Поступило 03.06.2021 г.
После доработки 03.06.2021 г.
Принято к публикации 08.02.2022 г.

В работе доказаны теоремы существования и единственности решений системы уравнений Прандтля для вязкой среды О.А. Ладыженской. Также получены асимптотические разложения решений в зависимости от скорости внешнего потока и поведения функции вдува–отсоса.

Ключевые слова: пограничный слой Прандтля, реологический закон О.А. Ладыженской, конфузор, асимптотики решений

DOI: 10.31857/S2686954322020084

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается магнитогидродинамический пограничный слой жидкости с нелинейным реологическим уравнением О.А. Ладыженской. В работах [1–3] такая система была изучена с использованием преобразования Мизеса, а в работах [4, 5] – с помощью преобразования Крокко (о преобразованиях Мизеса и Крокко см. [6]). О поведении электропроводных жидкостей см. [7]. Другие задачи гидродинамики реологически сложных сред см. [8–12], в которых доказаны теоремы существования и единственности для систем, описывающих поведение жидких кристаллов – нематиков.

В настоящей работе изучены движение жидкости в конфузоре (трубе переменного сечения) и поведение соответствующего пограничного слоя, начиная с носовой точки конфузора.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРОККО

Рассматривается двумерное стационарное течение модифицированной вязкой жидкости, подчиняющейся реологическому закону О.А. Ладыженской. В этом случае система уравнений Прандтля имеет вид

$$\begin{gathered}\nu\left(1+3d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial u}{\partial x}-\\ -v\frac{\partial u}{\partial y}+B^2(U-u)=-U\frac{dU}{dx},\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь ν, d – постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $B(x)$, $U(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. Функция скорости внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентами электрического поля $B(x)$ соотношением

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{dp}{dx}-EB-B^2U.$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D=\{0<x<X, 0<y<\infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}u(0,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad v(x,0)=v_0(x),\\ u(x,y)\to U(x)\quad \text{при}\quad y\to\infty,\end{gathered}\tag{2}$$

где $U(0)=0$, $U(x)>0$ при $x>0$. Пусть $U_x(0)>0$. Условия $U(0)=0$ и $u(0,y)=0$ определяют точку $x=0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости (носовая точка обтекаемого тела) и пограничный слой симметричен относительно этой точки.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: regina.bulatova@mech.math.msu.su*

О внешнем потоке в окрестности носовой точки обтекаемого тела известно, что скорость потока меняется по закону $U(x) \sim Cx^m$, где $C, m = \text{const} > 0$, причем m зависит от угла $\varphi = 2\pi\dfrac{m}{m+1}$ между образующими обтекаемой поверхности в точке $x = 0$, см. [13].

В работе [4] в аналогичных задачах предполагалось $m = 1$, т.е. пограничный слой рассматривался в окрестности затупленной носовой точки обтекаемого тела.

Определение 1. *Классическим решением задачи* (1), (2) *называются функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, *обладающие следующими свойствами*: $u(x, y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$, $v(x, y)$ *непрерывна в* D, *а по* y *в* $\overline{D}$; *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *имеют в* D *непрерывные производные*, *входящие в уравнение* (1); $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *удовлетворяют поточечно уравнениям* (1) *и граничным условиям* (2).

Задачу (1), (2) сводим к краевой задаче для одного квазилинейного уравнения с помощью замены переменных $(x, y) \to (\xi, \eta)$ и введения новой неизвестной функции $w(\xi, \eta)$, где

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x, y)}{U(x)}, \quad w(\xi, \eta) = \frac{u_y(x, y)}{U(x)}. \tag{3}$$

После преобразований получаем одно квазилинейное уравнение

$$\begin{gathered}\nu(1 + 3dU^2w^2)w^2w_{\eta\eta} - \eta Uw_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \\ - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2w_\eta^2w^3 + (\eta - 1)B^2w_\eta - B^2Uw = 0\end{gathered} \tag{4}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}w(\xi, 1) = 0, \\ (\nu ww_\eta(1 + 3dU^2w^2) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2)\big|_{\eta=0} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Определение 2. *Функция* $w(\xi, \eta)$ *называется решением задачи* (4), (5), *если* w *непрерывна в* $\overline{\Omega}$ *и имеет непрерывные производные* $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ *в* Ω; w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$; w *удовлетворяет уравнению* (4) *в* Ω *и граничным условиям* (5).

Предположим дополнительно, что $U(x) = x^mV(x)$, $V(x) > 0$ при $0 \le x \le X$, $v_0(x) = x^{\frac{m-1}{2}}v_1(x)$, $V(x) = a + xa_1(x)$, $a > 0$, $v_1(x) = b + xb_1(x)$, $a_1(x)$ и $b_1(x)$ достаточно гладкие функции. Перейдем от функции $w(\xi, \eta)$ к функции $w(\xi, \eta)\xi^{\frac{m-1}{2}}$, сохранив прежнее обозначение.

Получим уравнение

$$\begin{gathered}\nu(1 + 3d\xi^{3m-1}V^2(\xi)w^2)w^2w_{\eta\eta} - \\ - \eta\xi V(\xi)w_\xi + (\eta^2 - 1)(mV(\xi) + \xi V_\xi(\xi))w_\eta - \\ - \eta\left(\xi V_\xi(\xi) + \frac{3m-1}{2}V(\xi)\right)w + 6\nu dx^{\frac{9m-5}{2}}V^2(\xi)w_\eta^2w^3 + \\ + (\eta - 1)B^2w_\eta - B^2\xi V(\xi)w = 0\end{gathered} \tag{6}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}w(\xi, 1) = 0, \quad (\nu ww_\eta(1 + 3d\xi^{3m-1}V^2(\xi)w^2) - \\ - v_1(\xi)w + mV(\xi) + \xi V_\xi(\xi) + B^2)\big|_{\eta=0} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}L(Y) \equiv \nu Y^2Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)maY_\eta - \\ - \eta a\frac{3m-1}{2}Y + (\eta - 1)B^2Y_\eta = 0, \quad 0 < \eta < 1\end{gathered} \tag{8}$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv (\nu YY_\eta - bY + ma + B^2)\big|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0. \tag{9}$$

В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $V_x > 0$ *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Тогда задача* (4), (5) *в области* Ω, *где* X *зависит от* U, v_0, ν, *имеет положительное при* $\eta < 1$ *решение, обладающее следующими свойствами*: $w(\xi, \eta)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}$; *обобщенные производные* w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ *существуют и удовлетворяют неравенствам*

$$Ye^{-C_1\xi} \le w \le Ye^{C_2\xi}, \quad Y_\eta e^{C_3\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{-C_4\xi}, \tag{10}$$

$$|w_\xi(\xi, \eta)| \le C_5Y, \quad -C_6 \le w^2w_{\eta\eta} \le -C_7. \tag{11}$$

В любой замкнутой области, лежащей внутри Ω, *функция* w *и ее производные, входящие в уравнение* (4), *удовлетворяют условию Гёльдера.*

Теорема 2. *Задача* (4), (5) *в области* Ω *может иметь лишь одно неотрицательное решение* w, *обладающее следующими свойствами*: w *непрерывна в* Ω; w_η, $w_{\eta\eta}$, w_ξ *непрерывны во внутренних точках* Ω; $w > 0$ *при* $\eta = 0$; w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $V_x > 0$ *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Тогда задача* (1), (2) *в области* D, *при* X, *зависящем от* U *и* v_0, *имеет решение* u, v, *которое обладает*

следующими свойствами: $u_y > 0$ *при* $y \geq 0$ *и* $x > 0$; *функции* $\frac{u}{U}$, $\frac{u_y}{x^{\frac{m-1}{2}}U}$ *ограничены и непрерывны в* $\bar{D}$; $u > 0$ *при* $y > 0$ *и* $x > 0$; $u \to U$ *при* $y \to \infty$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y \geq 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy} *ограничены и непрерывны в* $\bar{D}$; v *непрерывна в* $\bar{D}$ *по* y *при* $x > 0$; v *непрерывна по* x *и* y *внутри* D; u_{yyy} *ограничена в* $\bar{D}$; u_{xy} *ограничена в* D *при ограниченных* y; u_{xy} *и* u_{yyy} *непрерывны в* $\bar{D}$; $\frac{u_{yy}}{x^{\frac{m-1}{2}}u_y}$ *непрерывна в* $\bar{D}$ *по* y; *имеют место оценки*

$$x^{\frac{m-1}{2}}U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_1x} \leq u_y \leq x^{\frac{m-1}{2}}U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x},$$

$$Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_3x} \leq \frac{u_{yy}}{u_y} \leq Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_4x},$$

$$e^{\left(-\frac{M_1^2}{4}x^{m-1}y^2e^{2C_2x}\right)} \leq 1 - \frac{u}{U} \leq e^{\left(-\frac{M_1^2}{4}x^{m-1}y^2e^{-2C_1x}\right)},$$

где $Y(\eta)$ – решение задачи (8), (9).

Теорема 4. *Пусть* u, v – *решение задачи* (1), (2) *такое, что*: *производные* u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} *непрерывны в* D; $\frac{u}{U}$ *и* $\frac{u_y}{x^{\frac{m-1}{2}}U}$ *непрерывны в* $\bar{D}$; $u_y > 0$ *при* $y \geq 0$, $x > 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y = 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; $\frac{u_{yy}}{x^{\frac{m-1}{2}}u_y}$, u_x *непрерывны по* y *при* $y = 0$; $\frac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leq 0$.

Тогда u, v – *единственное решение задачи* (1), (2) *с указанными свойствами*.

Предполагаем далее, что имеют место следующие асимптотики:

$$U(x) = x^m\left(a + \sum_{\beta=1}^{q} a_\beta x^\beta + a_{q+1}(x)\right),$$
$$v_0(x) = x^{\frac{m-1}{2}}\left(b + \sum_{\gamma=1}^{q} b_\gamma x^\gamma + b_{q+1}(x)\right), \tag{12}$$

где $a = \text{const} > 0$; $a_\beta = \text{const}$; $\beta = 1, \ldots, q$; b, $b_\gamma = \text{const}$; $\gamma = 1, \ldots, q$;

$$|a_{q+1}(x)| \leq C_8x^{q+1}, \quad \left|\frac{da_{q+1}}{dx}\right| \leq C_9x^q,$$
$$\left|\frac{d^2a_{q+1}}{dx^2}\right| \leq C_{10}x^{q-1},$$
$$|b_{q+1}(x)| \leq C_{11}x^{q+1}, \quad \left|\frac{db_{q+1}}{dx}\right| \leq C_{12}x^q, \quad q \geq 1.$$

Эти предположения выполняются, в частности, когда производная порядка $q + l + 1$ функции $U(x)$ и производная порядка $q + l$ функции $v_0(x)$ ограничены.

Рассмотрим семейство задач

$$T(Y_l) \equiv \nu Y_0^2Y_{l\eta\eta} + (\eta^2 - 1)maY_{l\eta} - 2\eta aY_l + 2\nu Y_0Y_{0\eta\eta}Y_l + (\eta - 1)B^2Y_{l\eta} = 0, \tag{13}$$

$$t(Y_l) \equiv \left(\nu Y_0Y_{l\eta} + \nu Y_{0\eta}Y_l - bY_l\right)\big|_{\eta=0} = 0, \quad l = 1, \ldots, q. \tag{14}$$

Здесь $Y_0(\eta)$ – решение задачи (8), (9).

Теорема 5. *Предположим, что для* $U(x)$ *и* $v_0(x)$ *имеем представления* (12) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* $w(\xi,\eta)$ *задачи* (4), (5) *справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\left|w(\xi,\eta) - \sum_{l=0}^{q} Y_l(\eta)\xi^l\right| \leq C_{13}Y_0(\eta)\xi^{q+1}, \quad 0 \leq \xi \leq X, \tag{15}$$

при $\xi \to 0$, *где* Y_l, $l = 1, \ldots, q$ – *решения задачи* (13), (14); Y_0 – *решение уравнения* (8) *с условиями* (9); C_{13} – *положительная постоянная*.

Теорема 6. *Предположим, что имеют место равенства* (12) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* u, v *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\left|u_y(x,y) - x^{\frac{m-1}{2}}U(x)\sum_{l=0}^{q} Y_l\left(\frac{u}{U}\right)x^{2l}\right| \leq C_{13}x^{\frac{m-1}{2}}U(x)Y_0\left(\frac{u}{U}\right)x^{2q+2} \tag{16}$$

где Y_m, $m = 1, \ldots, q$ – *решения задачи* (13), (14).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теоремы 1 и 2 могут быть доказаны с применением методов работы [4] (см. также [14]). Доказательство теоремы 1 проводится методом прямых, т.е. в уравнении задачи (6), (7) мы заменяем w_ξ разностным соотношением и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой доказываем теорему существования и затем с помощью предельного перехода доказываем существование решения исходного уравнения.

Для любой функции $f(\xi,\eta)$ введем обозначение

$$f^k = f^k(\xi,\eta) \equiv f(kh,\eta),$$
$$h = \text{const} > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h].$$

Уравнения (6) с условиями (7) заменим системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}L_k(w) := \nu(1 + 3d(kh)^{3m-1}(V^k)^2(w^k)^2)\times \\ \times (w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{w^k - w^{k-1}}{h} + \\ + (\eta^2 - 1)(mV^k + khV^k_\xi)w^k_\eta - \\ - \eta\left(\frac{3m-1}{2}V^k + khV^k_\xi\right)w^k + \\ + 6\nu d(kh)^{\frac{9m-5}{2}}(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3 + \\ + (\eta - 1)B^2 w^k_\eta - B^2khV^k w^k = 0, \\ 0 < \eta < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h],\end{gathered}$$

с граничными условиями

$$w^k(1) = 0$$
$$\begin{gathered}l_k(w) := (\nu(1 + 3d(kh)^{3m-1}(V^k)^2(w^k)^2)w^k w^k_\eta - \\ - v^k_1 w^k + mV^k + khV^k_\xi + B^2)\Big|_{\eta=0} = 0.\end{gathered}$$

Доказательство существования решения задачи (6), (7) основано на следующих леммах, доказанных в [14]. Далее через M_i и K_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h.

Лемма 1. *Задача* (6), (7) *имеет решение* $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, \ldots, [X/h]$, *которое непрерывно при* $0 \le \eta \le 1$ *и бесконечно дифференцируемо при* $0 \le \eta < 1$, *если* $V_x > 0$ *при* $0 \le x \le X$ *и* V, V_x, v_0 *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$K_1(1-\eta) \le w^k(\eta) \le K_2(1-\eta)\sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}$$

при $kh \le X$, *где* $h \le h_0$, $h_0 = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const}$, $0 < \mu < 1$.

Лемма 2. *Задача* (8), (9) *имеет решение со следующими свойствами*:

$$\begin{gathered}M_2(1-\eta)\sigma \le Y(\eta) \le M_1(1-\eta)\sigma \quad \text{при} \quad 0 \le \eta \le 1, \\ M_1(1-\eta)(\sigma - K_4) \le Y(\eta) \quad \text{при} \quad 0 < \eta_0 \le \eta < 1, \\ -M_4\sigma \le Y_\eta(\eta) \le -M_3\sigma, \quad |YY_{\eta\eta}| \le M_5, \quad YY_{\eta\eta} \le -M_6, \\ \sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad (17) \\ \nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \ge \frac{|b|}{a} + 2, \\ \frac{K_4}{\sigma} < 1 \quad \text{при} \quad \eta > \eta_0 = \text{const} \ge 0.\end{gathered}$$

Замечание 1. *Задача* (8), (9) *является задачей* (6), (7) *при* $k = 0$.

Лемма 3. *Предположим, что* $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$, *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $b_1(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Тогда при* $0 \le kh \le X$, *где* X *зависит от* $V(x)$, $v_0(x)$, *для решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (6), (7) *имеют место неравенства*

$$Ye^{-C_1kh} \le w^k(\eta) \le Ye^{C_2kh},$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (8), (9).

Далее для обоснования предельного перехода в задаче (6), (7) при $h \to 0$ оцениваются величины

$$r^k = \frac{w^k - w^{k-1}}{h}, \quad z^k = w^k_\eta, \quad (w^k)^2 w^k_{\eta\eta}$$

равномерно по h.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения леммы* 3; *кроме того*, $a_{1xx}(x)$ *и* $b_{1x}(x)$ *ограничены. Тогда при достаточно малом* X *и* $0 \le kh \le X$ *решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (6), (7) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\frac{w^k - w^{k-1}}{h}\right| \le C_3Y(\eta), \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{X}{h},$$

$$Y_\eta e^{C_4kh} \le w^k_\eta \le Y_\eta e^{-C_5kh}, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{X}{h},$$

$$|(w^k)^2 w^k_{\eta\eta}| < C_6,$$

$$(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} < -C_7, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{X}{h},$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (8), (9).

Обращая преобразование переменных (3), что возможно в силу свойств решения задачи (4), (5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (1), (2) в смысле данного нами определения.

4. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

В этом разделе доказаны теоремы 5 и 6. Задача (1), (2) решена в предположении, что $V(x)$ и $v_0(x)$ допускают асимптотическое представление при $x \to 0$ до слагаемых не ниже первого порядка по x. При этом полученные оценки функций $w(\varepsilon,\eta)$ и $u_y(x,y)$ дают возможность найти главный член асимптотики этих функций при $x \to 0$. Если известны асимптотические при $x \to 0$ разложения функций $V(x)$ и $v_0(x)$ с любым числом членов, то возможно получить асимптотическое разложение функции $u_y(x,y)$ до слагаемых любого порядка по x и оценить остаточный член разложения.

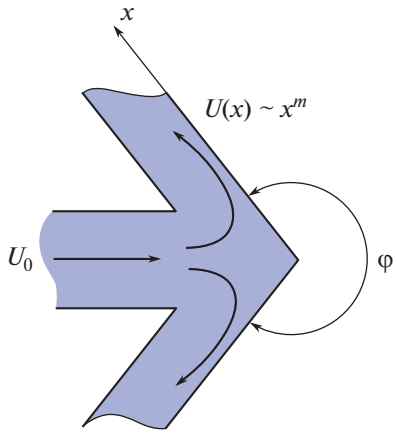

Рис. 1. Конфузор. Предполагается, что $m = \dfrac{\varphi}{2\pi - \varphi} > 1$.

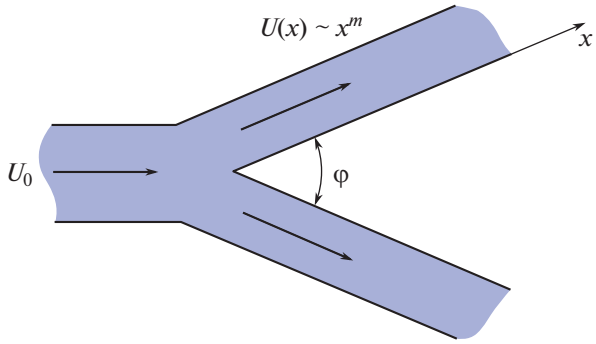

Рис. 2. Клин. Предполагается, что $m = \dfrac{\varphi}{2\pi - \varphi} < 1$.

Предположим, что имеют место асимптотические разложения (12) и воспользуемся утверждениями из [14].

Лемма 5. *Задача для уравнения*

$$\nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2 - 1) a Y_{m\eta} - 2\eta a Y_m + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m + \\ + \nu \sum_{\substack{\rho+l+s=m \\ \rho\neq m, l\neq m, s\neq m}} Y_\rho Y_l Y_{s\eta\eta} + (\eta^2 - 1) \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m}} (2s+1) a_s Y_{\rho\eta} - \\ - \eta \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m}} (2s+1) a_s Y_\rho - \eta \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m}} 2\rho a_s Y_\rho = 0$$

с граничными условиями

$$Y_m(1) = 0$$

$$\left(\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - b Y_m - \sum_{\substack{l+s=m \\ s\neq m}} b_l Y_s + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m, s\neq m}} \nu Y_s Y_{\rho\eta} - (2m+1) a_m \right)\Bigg|_{\eta=0} = 0,$$

где Y_0 — решение задачи (8), (9), *имеет решение, удовлетворяющее неравенствам*

$$|Y_m| \le N_m (1-\eta)\sigma, \quad |Y_{m\eta}| \le C_m \sigma, \quad |Y_0 Y_{m\eta\eta}| \le R_m,$$

где N_m, C_m, R_m — положительные постоянные, $m = 1, 2, \ldots, q$, а σ задана формулой (17).

Лемма 6. *Пусть имеют место асимптотические разложения* (12). *Тогда для решения $w(\xi, \eta)$ задачи* (4), (5) *справедливы оценки*

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{14}\xi^{q+1}} \le w \le \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{15}\xi^{q+1}}$$

при $0 \le \xi \le X$, где $Y_0(\eta)$ — решение задачи (8), (9); *$Y_1(\eta), \ldots, Y_q(\eta)$ — решение системы* (13), *с условиями* (14); *положительные постоянные X, C_{14}, C_{15} зависят от $U(x)$, $v_0(x)$.*

Доказательство теоремы 5. Пусть $C_{16} = \max(C_{14}, C_{15})$. По лемме 6 имеем

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{16}\xi^{q+1}} \le w \le \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{16}\xi^{q+1}}.$$

Отсюда легко следует (15). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство теоремы вытекает непосредственно из теоремы 5 и определения функции w.

Из неравенства (16) вытекает, в частности, следующая оценка:

$$\left| u_y(x,y) - x^{\frac{m-1}{2}} U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} \right| \le \le C_{16} U(x) Y_0(0) x^{\frac{4q+m+3}{2}}. \tag{18}$$

Из (18) вытекает асимптотическое разложение

$$u_y(x,y) = x^{\frac{m-1}{2}} U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} + + O\left(U(x) x^{\frac{4q+m+3}{2}} \right), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Поскольку касательная составляющая τ напряжения вязкого трения на поверхности обтекаемого тела равна $\nu\rho u_y(x,0)$, имеем

$$\tau = \nu\rho x^{\frac{m-1}{2}} U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} + + O\left(U(x) x^{\frac{4q+m+3}{2}} \right), \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

для любого целого положительного q. Теорема доказана.

5. КОММЕНТАРИИ

Отметим, что результаты работы остаются верными не только для конфузора (тупой угол φ, см. рис. 1), но и для клина, когда угол φ является острым, см. рис. 2.

При этом скорость в пограничном слое в окрестности острия клина имеет степенной характер $U(x) \sim x^m$, где $m < 1$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РНФ, грант № 20-1120272.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 329–361.
2. *Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 158–176.
3. *Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P., Samokhin V.N.* On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // C R Mécanique. 2018. V. 346. № 9. P. 807–814.
4. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // Доклады РАН. 2019. Т. 487. № 2. С. 7–13.
5. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О нестационарном пограничном слое вязкой реологически сложной жидкости // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 310. С. 40–77.
6. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997 508 с.
7. *Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле // ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 450–456.
8. *Ратью Т.С., Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Теоремы существования и единственности в двумерной нематодинамике. Конечная скорость распространения возмущений // ДАН. 2015. Т. 462. № 5. С. 519–523.
9. *Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov M.S., Samokhin V.N.* On Unique Solvability of the Full Three-Dimensional Ericksen-Leslie System // C R Méanique. 2016. V. 344. № 7. P. 459–463.
10. *Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S.* Nematodynamics and Random Homogenization // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 10. P. 2243–2253.
11. *Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov M.S., Samokhin V.N.* Existence and Uniqueness Theorems for the Two-Dimensional Ericksen – Leslie System // J. Mathematical Fluid Mechanics. 2016. № 18. P. 571–589.
12. *Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov M.S.* On the Eringen Model for Nematic Liquid Crystals // C R Méanique. 2021. V. 349. № 1. P. 21–27.
13. *Schlichting H.* A survey of some recent research investigatins on boundary layers and heat transfer // J. Appl. Mech. 1971. V. 47. № 6. P. 289–300.
14. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения симметричного пограничного слоя для модели вязкой среды О.А. Ладыженской в переменных Крокко // Проблемы математического анализа. 2019. Т. 98. С. 73–100.

ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE PRANDTL'S SYSTEM FOR A VISCOUS MHD ENVIRONMENT O.A. LADYZHENSKAYA AT FLOWING A CONFUSER

R. R. Bulatova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The article proves existence and uniqueness theorems for solutions of the Prandtl system of equations for a viscous medium O.A. Ladyzhenskaya. We also obtained asymptotic expansions of solutions depending on the speed of the external flow and the behavior of the injection – suction function.

Keywords: Prandtl's boundary layer, Ladyzhenskaya rheological law, confusor, asymptotics of solutions