ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 87–90

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ УСЛОВИЕ СТЕКЛОВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

© 2022 г. А. Г. Чечкина[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2021 г.
Поступило 26.02.2021 г.
После доработки 26.02.2021 г.
Принято к публикации 08.02.2022 г.

В n-мерной ($n \geq 3$) области рассматривается задача типа Стеклова с быстро меняющимся условием (чередуются условие Стеклова и однородное условие Дирихле). При этом коэффициент в условии Стеклова является быстро осциллирующей функцией, зависящей от малого параметра ε, которая имеет порядок $O(1)$ вне мелких включений в виде шаровых слоев на границе, где она имеет порядок $O((\varepsilon\delta)^{-m})$. Эти включения диаметра $O(\varepsilon\delta)$ расположены на расстоянии порядка $O(\delta)$ друг от друга, где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$. В случае $m < 2$ (слабая сингулярность) оценена скорость сходимости решений исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Ключевые слова: слабая сингулярность, задача Стеклова, граничное усреднение

DOI: 10.31857/S2686954322020096

Сингулярные возмущения коэффициентов дифференциальных уравнений и краевых условий возникают при моделировании различных прикладных задач. Асимптотический анализ таких задач см., например, в работах [1–6]. Непериодические случаи рассмотрены в [7, 8]. Задачи с сингулярностями внутри области изучены в работах [9, 10] (см. также [11, 12]).

Задача типа Стеклова с быстро меняющимся типом краевых условий рассматривалась в [13], где проанализирован весь спектр предельных случаев. Задачи с быстро осциллирующими граничными условиями изучались также в статьях [14, 15].

В настоящей работе рассматривается многомерная задача усреднения типа Стеклова со слабой сингулярностью, даются в соболевских нормах оценки скорости сходимости решений и собственных значений исходных задач от решений и собственных значений, соответственно, усредненных задач при стремлении малого параметра к нулю.

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, Башкортостан, Россия*
**E-mail: chechkina@gmail.com*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Мы предполагаем, что часть границы Γ_2 ($\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) лежит на гиперплоскости $x_n = 0$, при этом она состоит из трех частей α_ε, β_ε и γ_ε, где α_ε и β_ε образуют единую часть, которую мы обозначаем Γ_ε. Здесь $\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$ – объединение $(n-1)$-мерных шаров, а $\beta_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \beta_\varepsilon^i$ – объединение шаровых слоев. Поясним теперь построение. Пусть γ^0 – это $(n-1)$-мерный шар $\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2, \xi_n = 0\}$ и пусть $\beta^0 = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \varepsilon^2 < \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 < 2\varepsilon^2, \ \xi_n = 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\xi \frac{x}{\delta}$, γ и β – области, полученные целочисленными сдвигами множеств γ^0 и β_0 на гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$ с центрами в точках $\tilde{\xi}_k = (k_1, \ldots, k_{n-1}, 0)$, $k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$. Обозначим $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ – гомотетичное сжатие $\delta\gamma$ и $\tilde{\beta}_\varepsilon$ – гомотетичное сжатие $\delta\beta$. При этом (см. рис. 1)

$$\gamma_\varepsilon = \tilde{\gamma}_\varepsilon \cap \partial\Omega, \quad \beta_\varepsilon = \tilde{\beta}_\varepsilon \cap \partial\Omega \quad \alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \backslash (\beta_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon).$$

Предполагается, что параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между участками γ_ε^i и β_ε^i на границе, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

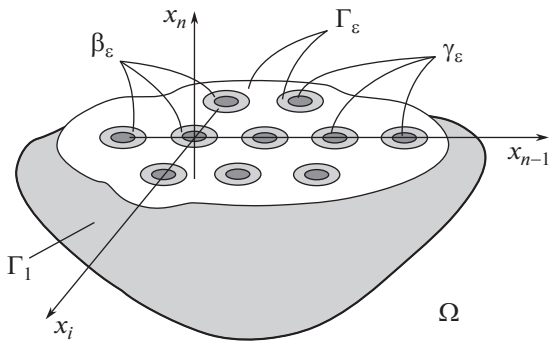

Рис. 1. Область с микронеоднородной структурой границы.

Также заметим, что количество участков β_ε^i и соответственно участков γ_ε^i имеет следующий порядок: $N_\delta = O\left(\frac{1}{\delta^{n-1}}\right)$.

В области Ω рассматривается спектральная задача с быстрой сменой краевых условий и сингулярными коэффициентами

$$\begin{gathered}\Delta u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon,\\ \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_n} = \lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon,\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\varepsilon\delta)^m}, & x \in \beta_\varepsilon,\\ 1, & x \in \alpha_\varepsilon.\end{cases} \tag{2}$$

В этой работе ограничимся только случаем $m < 2$ (слабая сингулярность).

Собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^k\}$ занумерованы в порядке неубывания, т.е. $\lambda_\varepsilon^1 \le \lambda_\varepsilon^2 \le \dots \le \lambda_\varepsilon^k \le \dots$, и повторяются с учетом кратности. При этом нормируем собственные функции следующим образом:

$$\int_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon(\hat{x},0) u_\varepsilon^k(\hat{x},0) u_\varepsilon^l(\hat{x},0)\, d\hat{x} = \delta_{kl},$$

здесь $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Для формулировки теорем нам понадобится величина

$$P := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}.$$

Обозначим

$$D = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots n-1, \xi_n < 0\right\},$$

$$\Sigma = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n-1, \xi_n = 0\right\}.$$

Пусть функция W^ε, периодическая по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, является первой собственной функцией задачи типа Стеклова на ячейке периодичности

$$\begin{gathered}\Delta W^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad D,\\ W^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0\\ \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \theta_\varepsilon W^\varepsilon \quad \text{на} \quad \Sigma\backslash\gamma_0.\end{gathered} \tag{3}$$

Зададим w_ε^δ формулой

$$w_\varepsilon^\delta(x) = 1 + \psi(x_n)\left(W^\varepsilon\left(\frac{x}{\delta}\right) - 1\right) \tag{4}$$

и продолжим ее периодически вдоль гиперплоскости $x_n = 0$. Здесь $\psi(t)$ – гладкая срезающая функция одной переменной, $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ в некоторой достаточно малой окрестности Γ_2. Свойства функции w_ε^δ подробно изучены в [13].

Для формулировки результатов рассмотрим краевые задачи

$$\begin{gathered}\Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon,\\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} = \rho^\varepsilon(x) f(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon.\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Delta u^0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (P = +\infty),\\ \left[\begin{array}{c}\dfrac{\partial u^0}{\partial x_n} + P\dfrac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u^0 = f(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_2\\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\end{array}\right], \quad (P < +\infty),\end{gathered} \tag{6}$$

где σ_n – площадь единичной n-мерной сферы, а $c_{\gamma_0} := \operatorname{cap}(\gamma_0)$ – гармоническая емкость $(n-1)$-мерного диска γ_0.

Имеет место теорема об оценке решений.

Теорема 1. *Если $P < +\infty$, u^ε и u^0 – обобщенные решения задач* (4) *и* (5), *соответственно, то существует такая константа $K_1(f, \gamma_0, n)$, не зависящая от ε и δ, что для достаточно малых ε имеем*

$$\|u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le K_1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right).$$

Если $P = +\infty$, то существует $K_2(f, \gamma_0, n)$ такое, что

$$\left\|u^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)} \le K_2\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right).$$

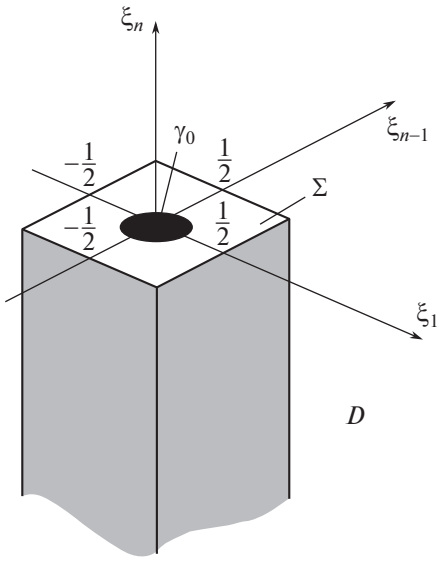

Рис. 2. Ячейка периодичности.

Теперь сформулируем спектральную задачу

$$\Delta u_0^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u_0^k = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (P = +\infty), \tag{7}$$
$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_0^k}{\partial x_n} + P\dfrac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u_0^k = \lambda_0^k u_0^k \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ u_0^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \int\limits_{\Gamma_2} u_0^k u_0^l d\hat{x} = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \le \lambda_0^2 \le \cdots \end{array}\right] \quad (P < +\infty).$$

Имеет место теорема о сходимости собственных значений и собственных функций.

Теорема 2. *Пусть* λ_0^k, λ_ε^k *являются собственными значениями задач* (6) *и* (1) *соответственно. Тогда*

$$\left|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k\right| \le C_k^1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right),$$
$$\text{если} \quad P < \infty,$$

$$\lambda_\varepsilon^k \to +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{если} \quad P = +\infty,$$

где постоянные C_k^1, C_k^2 *не зависят от* ε.

Если кратность собственного значения λ_0^l *задачи* (7) *равна r, т.е.* $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \cdots = \lambda_0^{l+r}$, *то для любой собственной функции* u_0^l *задачи* (7), *соответствующей собственному значению* λ_0^l, $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$, *существует линейная комбинация* $\overline{u}^\varepsilon$ *собственных функций задачи* (1), *соответствующих собственному значению* $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \cdots, \lambda_\varepsilon^{l+r}$ *такая, что*

$$\left\|u^\varepsilon - u_0^l\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le C_l^1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right), \quad \text{если} \quad P < \infty,$$

$$\left\|u^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)} \le C_l^2\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right), \quad \text{если} \quad P = +\infty,$$

где постоянные C_l^1, C_l^2 *не зависят от* ε *и* u_0^l.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журнал. 1988. Т. 29. № 5. С. 71–91.
2. *Gómez D., Lobo M., Pérez E.* On the Eigenfunctions Associated with the High Frequencies in Systems with a Concentrated Mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. P. 841–865.
3. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Vibration and Coupling of Continuous System. Asymptotic methods. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 421 p.
4. *Chechkin G.A.* On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “Light” Concentrated Masses on the Boundary // C. R. Мmanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.
5. *Чечкин Г.А.* Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. Вып. 4. С. 205–206.
6. *Rybalko V.* Vibration of Elastic Systems with a Large Number of Tiny Heavy Inclusions // Asymptotic Analysis. 2002. V. 32. № 1. P. 27–62.
7. *Перес М.Е., Чечкин Г.А., Яблокова (Доронина) Е.И.* О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.
8. *Chechkin G.A., Chechkina T.P.* Random Homogenization in a Domain with Light Concentrated Masses // Mathematics. 2020. V. 8. № 5. https://doi.org/10.3390/math8050788
9. *Chechkin G.A., Mel’nyk T.A.* Asymptotics of Eigenelements to Spectral Problem in Thick Cascade Junction with Concentrated Masses // Applicable Analysis. 2012. V. 91. № 6. P. 1055–1095.
10. *Chechkin G.A., Mel’nyk T.A.* Spatial–Skin Effect for Eigenvibrations of a Thick Cascade Junction with “Heavy” Concentrated Masses // Mathematical Methods in Applied Sciences (M2AS). 2014. V. 37, № 1. P. 56–74.
11. *Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl’shin R.R.* Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary // C. R. Mécanique. 2008. V. 336. № 9. P. 693–698.
12. *Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A., Piatnitski A.L.* On Boundary Value Problem with Singular Inhomogeneity Concentrated on the Boundary //

Journal de Mathématiques Pures et Appliquos. 2012. V. 98. № 2. P. 115–138.

13. *Чечкина А.Г.* Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // Известия РАН. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
14. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
15. *Oleinik O.A., Chechkin G.A.* Solutions and Eigenvalues of the Boundary Value Problems with Rapidly Alternating Boundary Conditions for the System of Elasticity // Rendiconti Lincei: Mathematica e Applicazioni. Serie 9. 1996. V. 7. № 1. P. 5–15.

WEAKLY SINGULAR STEKLOV CONDITION IN MULTIDIMENSIONAL CASE

A. G. Chechkina[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In a n-dimensional ($n > 3$) domain we consider a Steklov-type problem with rapidly changing conditions (the Steklov condition alternates with the homogeneous Dirichlet condition). In addition the coefficient in the Steklov condition is a rapidly oscillating function depending on the small parameter ε of the order $O(1)$ outside small spherical layer inclusions, where it has the order $O((\varepsilon\delta)^{-m})$. These inclusions of the diameter $O(\varepsilon\delta)$, are on the distance of order $O(\delta)$ from each other, where $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$. In the case $m < 2$ (weak singularity), the rate of convergence is estimated for solutions to the original problem as the small parameter tends to zero.

Keywords: Weak singularity, Steklov problem, boundary homogenization