ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 48–53

МАТЕМАТИКА

УДК 517.63

МАРКОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭВОЛЮЦИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. Дж. Гоф[1,*], Ю. Н. Орлов[2,], В. Ж. Сакбаев[2,***], О. Г. Смолянов[3,4]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2022 г.
Поступило 26.08.2021 г.
После доработки 27.01.2022 г.
Принято к публикации 15.02.2022 г.

Изучается сходимость по вероятности итераций независимых случайных квантовых динамических полугрупп к марковскому процессу, описывающему эволюцию открытой квантовой системы. Статистические свойства динамики открытых квантовых систем со случайными генераторами марковской эволюции описываются на языке закона больших чисел для операторнозначных случайных процессов. Для композиций независимых случайных вполне положительных полугрупп установлена сходимость математических ожиданий к полугруппе преобразований, порождаемой уравнением Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада. При этом устанавливается сходимость по вероятности последовательности операторнозначных функций, значениями которых являются операторы, не обладающие свойством безграничной делимости, к операторнозначной функции, значения которой представляют собой безгранично делимые операторы.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайная операторнозначная функция, операторнозначный случайный процесс, закон больших чисел, открытые квантовые системы, марковские процессы, уравнение Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада

DOI: 10.31857/S2686954322020102

Обсуждается сходимость по вероятности итераций независимых случайных квантовых динамических полугрупп к марковскому процессу, описывающему эволюцию открытой квантовой системы. При этом применяются однопараметрические семейства вполне положительных отображений алгебры ограниченных линейных операторов в себя, удовлетворяющие уравнению Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [1–3]. В сообщении исследуются асимптотические свойства последовательности композиций независимых случайных вполне положительных преобразований алгебры $\mathcal{L}(H)$ линейных операторов, действующих в конечномерном комплексном гильбертовом пространстве H. При получении перечисленных результатов используется развитый в работах [4, 5] подход к общей теории случайных полугрупп.

Статистические свойства динамики открытых квантовых систем со случайными генераторами марковской эволюции рассматривались в работах [6, 7]. В предлагаемом в сообщении подходе такие свойства описываются на языке закона больших чисел для операторнозначных случайных процессов. При этом обсуждаются случайные величины со значениями в пространстве сильно непрерывных отображений вещественной полуоси в конус вполне положительных операторов банахова пространства $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$. Далее используются термины и обозначения из книги [8]. Если E – локально выпуклое пространство, то для обозначения множества линейных непрерывных отображение из E в E будет использоваться символ $\mathcal{L}(E)$ (вместо символа $\mathcal{L}(E, E)$). В частности, линейное пространство линейных непрерывных отображений из $\mathcal{L}(E)$ в $\mathcal{L}(E)$ будет обозначаться символом $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Для случайных вполне положительных полугрупп установлена сходимость математических ожиданий к полугруппе отображений, порождаемой уравнением ГКСЛ. При этом устанавливается сходимость последовательности оператор-

[1] *Aberystwyth University, Wales, UK*
[2] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[4] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: jug@aber.ac.uk*
***E-mail: orlmath@keldysh.ru*
****E-mail: fumi2003@mail.ru*

нозначных функций, значениями которых являются операторы, не обладающие свойством безграничной делимости, к операторнозначной функции, значениями которой служат безгранично делимые операторы.

Отметим, что близкая к тематике настоящего сообщения проблема сходимости по распределению последовательности произведений независимых случайных матриц была исследована в работе [9]. Однако рассматриваемая в сообщении постановка задачи и полученные результаты значительно отличаются от результатов [9]. А именно, теорема 7 [9] представляет закон больших чисел, утверждающий сходимость по распределению последовательности произведений случайных матриц к детерминированной предельной матрице. В то время как закон больших чисел в настоящем сообщении устанавливает сходимость по вероятности последовательности случайных композиций к предельной полугруппе и позволяет дать оценку вероятности отклонения в форме неравенства Чебышева [4].

Отметим, что условия, накладываемые в настоящем сообщении на случайные полугруппы, существенно отличаются от условий, используемых в работах [4, 10]. При этом систематически применяется предложенный в [11] комбинаторный подход.

1. КВАНТОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ

Всюду далее $H = \mathbb{C}^d$, где $d \in \mathbb{N}$. Из конечномерности пространства H вытекает, что любые две нормы в каждом из встречающихся далее тензорных произведениях эквивалентны, и что эти тензорные произведения полны относительно топологий, задаваемых каждой из этих норм.

Пусть далее $\mathcal{L}(H)$ – банахово пространство линейных операторов, действующих в пространстве H, наделенное стандартной операторной нормой; $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ – банахово пространство линейных отображений пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя, снабженное стандартной операторной нормой. Напомним, что элемент $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ называется положительным, если $\mathbf{A}(\mathbf{X}) \geq 0$ для любого $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(H)$ такого, что $\mathbf{X} \geq 0$.

Элемент $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ называется вполне положительным отображением пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя (см. [12]), если линейный оператор $\mathbf{Id} \otimes \mathbf{A}$, действующий в алгебре $\mathcal{M}_d \otimes \mathcal{L}(H)$ по правилу

$$\mathbf{Id} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{X}) \ \forall\ \mathbf{M} \in \mathcal{M}_d,$$
$$\forall \mathbf{X} \in \mathcal{L}(H),$$

является положительным в алгебре операторов $\mathcal{M}_d \otimes \mathcal{L}(H)$, где $\mathcal{M}_d$ – алгебра $d \times d$ матриц над полем комплексных чисел.

Теорема [13]. *Если* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$, *то* $\mathbf{A}$ *является вполне положительным тогда и только тогда, когда существует набор операторов*

$$\mathbf{V}_a \in \mathcal{L}(H), \quad a = 1, 2, \ldots, d^2, \text{ такой, что}$$
$$\mathrm{A}(\mathbf{X}) = \sum_{a=1}^{d^2} \mathbf{V}_a \mathbf{X} \mathbf{V}_a^*.$$

Непосредственно проверяется, что справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Сумма двух вполне положительных отображений является вполне положительным отображением.*

Лемма 2. *Композиция двух вполне положительных отображений является вполне положительным отображением.*

Напомним, что квантовым каналом в пространстве наблюдаемых называется линейное вполне положительное отображение пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя, сохраняющие единичный оператор $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(H)$. Однопараметрическая непрерывная полугруппа квантовых каналов в алгебре линейных операторов $\mathcal{L}(H)$ называется квантовой динамической полугруппой.

Теорема (Теорема Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада) [14, 15]. *Генератор* $\mathcal{L}$ всякой однопараметрической равномерно непрерывной полугруппы $\mathbf{W}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, вполне положительных отображений пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя задается равенством

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \sum_a \mathbf{L}_a^* \mathbf{X} \mathbf{L}_a - \mathbf{X}\mathbf{K} - \mathbf{K}^*\mathbf{X}, \tag{1}$$

где $\mathbf{K} = \frac{1}{2}\sum_a \mathbf{L}_a^* \mathbf{L}_a + i\mathbf{H}$, $\{\mathbf{L}_a\}$ – *набор из не более чем* $d^2 - 1$ *операторов из алгебры* $\mathcal{M}_d$ *и* $\mathbf{H} = \mathbf{H}^* \in \mathcal{M}_d$.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Генератор квантовой динамической полугруппы $\mathcal{L}$ является случайным, если в (1) операторы $\mathbf{L}_a$ и $\mathbf{H}$ являются случайными величинами со значениями в алгебре матриц $\mathcal{M}_d$. Случайной величиной со значениями в пространстве линейных отображений пространства $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ в себя называется измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в пространство $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$, наделенное слабой операторной топологией (в случае конечномерного пространства H совпадающей с топологией операторной нормы). Композиции случайных ортогональных преобразований конечномерных евклидовых пространств исследованы в [17].

Ставится задача исследовать свойства композиций независимых случайных процессов со зна-

чениями в конусе $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))_{CP}$ вполне положительных отображений пространства $\mathcal{L}(H)$.

Множество равномерно непрерывных квантовых динамических полугрупп, действующих в банаховой алгебре $\mathcal{L}(H)$, обозначим через $QDS(\mathcal{L}(H))$. Между множеством $QDS(\mathcal{L}(H))$, наделенным топологией равномерной на каждом отрезке сходимости в пространстве линейных операторов, и множеством $QDG(\mathcal{L}(H))$ генераторов непрерывных квантовых динамических полугрупп, наделенном топологией операторной нормы, в силу теорем Хилле–Иосиды и Линдблада существует биекция. Заметим, что равномерная непрерывность вытекает из непрерывности в нашем случае.

Пусть Φ_t, $t \geq 0$, – случайная квантовая динамическая полугруппа в алгебре $\mathcal{L}(H)$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, т.е. $(\Phi_t)_{t\geq 0}$: $\omega \to (\phi_{t,\omega})_{t\geq 0}$ – $\mathcal{F}$-измеримое отображение со значениями в $QDS(\mathcal{L}(H))$. Средним значением случайной полугруппы Φ_t, $t \geq 0$, является ее математическое ожидание $\mathrm{M}[(\Phi_t)_{t\geq 0}]$, определяемое равенством

$$\mathrm{M}[(\Phi_t)] = \int_\Omega \phi_{t,\omega} P(d\omega), \quad t \geq 0.$$

Если Φ_t, $t \geq 0$, – случайная квантовая динамическая полугруппа в алгебре $\mathcal{L}(H)$, то ее математическое ожидание представляет собой однопараметрическое семейство вполне положительных отображений, которое может не являться однопараметрической полугруппой. Однако для широкого класса случайных квантовых динамических полугрупп математическое ожидание $\mathrm{M}[(\Phi_t)]$, $t \geq 0$, эквивалентно по Чернову полугруппе с усредненным генератором. Напомним, что операторнозначная функция $\mathbf{F}$: $[0,+\infty) \to \mathcal{L}(X)$ называется эквивалентной по Чернову полугруппе $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, линейных преобразований пространства X, если для каждого $x \in X$ и каждого $T > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\left(\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n - U(t)\right)x\right\|_X\right] = 0.$$

Теорема Чернова (см. [16]) предоставляет достаточные условия эквивалентности по Чернову математического ожидания $\mathrm{M}[(\Phi_t)]$, $t \geq 0$, и полугруппы $\exp\left(\mathrm{M}[\Phi'(0)]t\right)$, $t \geq 0$.

Теорема 1. *Пусть Φ_t, $t \geq 0$, – случайная равномерно непрерывная квантовая динамическая полугруппа в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$, а $\mathbf{G}$ – ее случайный генератор, принимающий значения в шаре некоторого радиуса $\rho > 0$ пространства $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$. Тогда если $\bar{\mathbf{G}} = \int_\Omega \mathbf{G} P(d\omega)$, то математическое ожидание $\mathrm{M}[(\Phi_t)]$, $t \geq 0$, эквивалентно по Чернову полугруппе $\exp(\bar{\mathbf{G}}t)$, $t \geq 0$.*

Достаточно проверить условия теоремы Чернова. Поскольку операторнозначные функции $\phi_{t,\omega}$, $t \geq 0$, при каждом $\omega \in \Omega$ непрерывны, удовлетворяют оценке $\|\phi_{t,\omega}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))} \leq \exp(\rho t)$, $t \geq 0$, принимают значения в конусе $(\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)))_{CP}$, сохраняют единичный оператор и удовлетворяют условию $\phi_{0,\omega} = \mathrm{Id}$, то всеми этими свойствами обладает и операторнозначная функция $\mathbf{F}(t) = \int_\Omega \phi_{t,\omega} P(d\omega)$, $t \geq 0$. При каждом $\omega \in \Omega$ справедливо равенство $\phi_{t,\omega} = \mathrm{Id} + t\mathbf{G}_\omega + r(t,\omega)$, где $\|r(t,\omega)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ct^2 \exp(t\rho)$, $\rho = \sup_{\omega\in\Omega}\|\mathbf{G}_\omega\|_{\mathcal{L}(X)}$. Следовательно, $\mathbf{F}(t) = \mathrm{Id} + t\bar{\mathbf{G}} + r(t)$, где $\|r(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ct^2\exp(t\rho)$, потому существует производная $\mathbf{F}'(0) = \bar{\mathbf{G}} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$, причем $\|\bar{\mathbf{G}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))} \leq \rho$. Значит, все условия теоремы Чернова выполнены, что и доказывает теорему 1.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $\mathbf{A}$ – случайная величина со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{L} = \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ линейных операторов, действующих в банаховой алгебре $\mathcal{L}(H)$, определяемая как слабо измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в пространство $\mathbb{L}$. Слабая измеримость отображения $\mathbf{A}$: $\Omega \to \mathbb{L}$ (т.е. измеримость функций $\langle g, \mathbf{A}f\rangle$ при любых $f \in \mathcal{L}(H)$, $g \in (\mathcal{L}(H))^*$) в случае конечномерного пространства H равносильна измеримости отображения в банахово пространство $\mathbb{L}$ и влечет измеримость вещественнозначной случайной величины $\|\mathbf{A}\|_{\mathbb{L}}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{U}$ – действующая в пространстве $\mathcal{L}(H)$ случайная квантовая динамическая полугруппа, случайный генератор $\mathbf{A}$ которой принимает значение в некотором шаре банахова пространства $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$. Пусть $\{\mathbf{U}_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных полугрупп, распределение каждой из которых совпадает с распределением U. Тогда последовательность*

$$\mathbf{W}_n(t) = \mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

композиций случайных полугрупп сходится по вероятности к однопараметрической полугруппе $\bar{\mathbf{U}}(t) = \exp(\bar{\mathbf{A}}t)$, $t \geq 0$: для любых $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(H)$, $T > 0$, и $\epsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\sup_{t\in[0,T]}\|(\mathbf{W}_n(t) - \bar{\mathbf{U}}(t))\mathbf{X}\|_{L(H)} > \epsilon\}) = 0.$$

Докажем теорему 2. Случайная величина $\mathbf{A}$, принимающая значения в шаре некоторого радиуса $\rho > 0$ банахова пространства $\mathbb{L}$, имеет математическое ожидание $\mathrm{M}(\mathbf{A}) = \bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{L}$.

При каждом $t \geq 0$ оператор $\exp(\mathbf{A}t)$ является случайной величиной со значениями в шаре радиуса $\exp(t\rho)$ пространства $\mathbb{L}$. Следовательно, функция $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{L}$ определена равенством $\mathbf{F}(t) = \mathrm{M}(\exp(\mathbf{A}t)) = \int\limits_{\Omega} \exp(\mathbf{A}t)d\mathbf{P}(\omega)$. Согласно теореме 1 [10], функция $\mathbf{F}$ является непрерывным в сильной операторной топологии отображением $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{L}$ (согласно конечномерности пространства $\mathbb{L}$ отображение непрерывно и в топологии нормы).

При каждом $\omega \in \Omega$ и каждом $t \geq 0$ в силу теоремы Лагранжа о среднем (см. 4.6.4 в [8]) имеют место оценки

$$\|\exp(\mathbf{A}t) - \mathbf{I}\|_{\mathbb{L}} \leq t\rho\exp(\rho t). \tag{3}$$

Из теоремы 1 следует, что справедливо равенство $\left.\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right|_{t=0} = \bar{\mathbf{A}}$.

Аналог закона больших чисел для композиции случайных полугрупп (2) устанавливается с помощью операторного аналога неравенства Чебышева [4, 11], для получения которого вводится операторнозначная дисперсия случайного оператора. Воспользовавшись конечномерностью пространств H и $\mathscr{L}(H)$, выберем в пространстве $\mathscr{L}(H)$ эквивалентную норме $\|\cdot\|_{L(H)}$ норму $\|\cdot\|_{\mathscr{L}_2(H)}$ пространства операторов Гильберта–Шмидта, превращающую $\mathscr{L}(H)$ в гильбертово пространство. Символом $\mathscr{L}_2(H)$ обозначим линейное пространство $\mathscr{L}(H)$, наделенное нормой Гильберта–Шмидта. Тогда $(\mathbf{W}_n(t)) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}_2(H))$ и $(\mathbf{W}_n(t))^* \in \mathscr{L}(\mathscr{L}_2(H))$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ и каждом $t \geq 0$. Поскольку пространство $\mathscr{L}_2(H)$ является гильбертовым, то для композиций случайных операторов со значениями в наделенном сильной операторной топологией пространстве $\mathscr{L}(\mathscr{L}_2(H))$ применим подход, предложенный в [4, 11]. Определим дисперсию случайной операторнозначной функции (2) равенством

$$\mathbf{D}(\mathbf{W}_n(t)) = \mathrm{M}[(\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n(t))^*(\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n(t))],$$
$$t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для оценки дисперсии случайной композиции $\mathbf{W}_n$ введем следующее случайное отклонение от математического ожидания. При каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $\mathbf{V}_k(t) = \mathbf{U}_k(t) - \mathbf{F}(t)$, $t \geq 0$. Тогда $\mathrm{M}[\mathbf{V}_k(t)] = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, и в силу (3) при каждом $t \geq 0$ с вероятностью 1 выполнена оценка

$$\|\mathbf{V}_k(t)\|_{\mathbb{L}} \leq \|\mathbf{U}_k(t) - \mathbf{I}\|_{\mathbb{L}} + \|F(t) - \mathbf{I}\|_{\mathbb{L}} \leq 2t\rho\exp(t\rho). \tag{4}$$

В силу (2) при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right)\right) \circ \ldots \circ \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right),$$
$$t \geq 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n + \sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} +$$
$$+ \sum_{1\leq j<k\leq n}\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k-j-1} V_k\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} +$$
$$+ \ldots + \mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad t \geq 0;$$

$$\mathbf{W}_n^*(t)\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right) + \right. \tag{5}$$
$$\left. + \mathbf{V}_1^*\left(\frac{t}{n}\right)\right) \circ \ldots \circ \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_n^*\left(\frac{t}{n}\right)\right) \times$$
$$\times\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right)\right) \circ \ldots \circ \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

Произведение $2n$ биномов в (5) содержит 2^{2n} различных слагаемых. Поскольку математическое ожидание любой из случайных величин $\mathbf{V}_j\left(\frac{t}{n}\right)$ равно нулю, то ненулевой вклад в математическое ожидание суммы из 2^{2n} слагаемых вносят только такие слагаемые, в которых набор сомножителей из $\mathbf{V}_j$ совпадает с набором сомножителей из $\mathbf{V}_k^*$. Поэтому при каждом $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathrm{M}\mathbf{W}_n^*(t)\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} \mathbf{V}_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \times$$
$$\times\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\Big)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} +$$
$$+ \sum_{1\leq j<k\leq n}\mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} \mathbf{V}_k^*\left(\frac{t}{n}\right)\Big) \times$$
$$\times\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k-j-1} \mathbf{V}_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\Big)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \circ$$
$$\circ\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \mathbf{V}_j\left(\frac{t}{n}\right)\Big)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k-j-1} \mathbf{V}_k\left(\frac{t}{n}\right)\Big)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} + \ldots +$$
$$+ \mathrm{M}\mathbf{V}_1^*\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{V}_n^*\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right).$$

Следовательно, для дисперсии случайной операторнозначной величины $\mathbf{W}_n(t)$ имеет место равенство

$$\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)] = \mathrm{M}\mathbf{W}_n^*(t)\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n^*(t)\mathrm{M}\mathbf{W}_n(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} V_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1}\times$$
$$\times\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\Big)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} + \ldots$$
$$+\mathrm{M}\mathbf{V}_1^*\left(\frac{t}{n}\right)\circ\ldots\circ\mathbf{V}_n^*\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right)\circ\ldots\circ\mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right). \qquad (6)$$

Поскольку $\left\|\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathbb{L}} \le \exp\left(\frac{t}{n}\rho\right)$, то в силу оценки (4) справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j}\mathbf{V}_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1}\times\right.$$
$$\left.\times F\left(\frac{t}{n}\right)\Big)^{j-1}\mathbf{V}_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j}\right\|_{\mathbb{L}} \le C_n^1 e^{2\rho t}\frac{(2\rho t)^2}{n^2}.$$

Оценивая таким же образом оставшиеся слагаемые в формуле (6), в силу (3) и (4) получим оценку

$$\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\|_{\mathbb{L}} \le C_n^1 e^{2\rho t}\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^2 +$$
$$+C_n^2 e^{2\rho t}\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^4 + \ldots + C_n^n e^{2\rho t}\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^{2n} =$$
$$= e^{2\rho t}\left[\left(1+\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^2\right)^n - 1\right].$$

Согласно формуле Тейлора найдется число $s \in (0, 1)$ такое, что

$$\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\|_{\mathbb{L}} \le \frac{t^2\rho^2}{n}e^{2\rho t}\left(1+s\left(\frac{t}{n}\rho\right)^2\right)^n \le$$
$$\le \frac{(2t\rho)^2}{n}e^{2\rho t}e^{t^2\rho^2}.$$

Следовательно, для каждого $T > 0$ существует такое число $C = C(T, \rho) > 0$, что $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\|_{\mathbb{L}} < \frac{C}{n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда согласно неравенству Чебышева для операторнозначных случайных величин (см. лемму 1 в [4]), для любых $T > 0$ и $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(H)$ справедливо неравенство

$$P(\{\sup_{t\in[0,T]}\|(\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n(t))\mathbf{X}\|_{\mathcal{L}_2(H)} > \epsilon\}) \le$$
$$\le \frac{1}{\epsilon^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\mathbf{X}\|_{\mathcal{L}_2(H)}. \qquad (7)$$

В силу независимости случайных генераторов имеем $\mathrm{M}(\mathbf{W}_n(t)) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. Согласно теореме 1,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|(\mathrm{M}(\mathbf{W}_n(t)) - \bar{\mathbf{U}}(t))\mathbf{X}\|_{\mathcal{L}(H)} = 0$$

для любых $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(H)$ и $T > 0$. В силу эквивалентности норм $\mathcal{L}(H)$ и $\mathcal{L}_2(H)$ неравенство (7) доказывает утверждение теоремы 2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А.С. Холево за плодотворные обсуждения, позволившие существенно улучшить статью, и за указание на работу [9], посвященную проблеме сходимости по распределению последовательности произведений независимых случайных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davies E.* Quantum theory of open systems. L.: Acad. Press, 1976.
2. *Alicki R., Lendi K.* Quantum dynamical semigroups and applications // Lect. Notes in Phys. 1987. № 286.
3. *Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.V.* Quantum theory and its stochastic limit. N.Y.: Springer, 2001.
4. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Труды МИАН. 2019. Т. 306. С. 210–226.
5. *Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. С. 31–35.
6. *Tarnovski W., Yusipov I., Laptyeva T., Denosov S., Chruscinski D., Zycxkowski K.* Random generators of Markovian evolution: quantum-classikal transition by superdecoherence // ArXiv: 2105.02369.v2
7. *Bonaccorci S., Cottini F., Mugnolo D.* Random evolution equation: well-posedness, asymptotics and application to graphs // Appl. Math. Optim. 2021. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09732-w
8. *Bogachev V.I., Smolyanov O.G.* Topological vector spaces and their applications. Heidelberg: Springer, 2017.
9. *Berger M.A.* Central limit theorem for products of random matrices // Trans. AMS. 1984. V. 285. № 2. P. 777–803.
10. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
11. *Сакбаев В.Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных операторов и случайных полугрупп // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 1. С. 140–152.
12. *Холево А.С.* Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002.
13. *Choi M.-D.* Completely positive linear maps on complex matrices // Linear Algebra and its Applications. 1975. V. 10. P. 285–290.
14. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G.* Completely positive dynamical semigroups of *N*-level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 821–825.

15. *Lindblad G.* On the generator of completely positive semigroups // Comm. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119–130 (1976).
16. *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.
17. *Замана К.Ю.* Усреднение случайных ортогональных преобразований аргумента функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ // Уфимский матем. журнал. 2021. Т. 13. № 4.

MARKOV APPROXIMATIONS OF QUANTUM SYSTEM EVOLUTION

J. Gough[a], Yu. N. Orlov[b], V. Zh. Sakbaev[b], and O. G. Smolyanov[c,d]

[a] *Aberystwyth University, Wales, UK*
[b] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[c] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*
[d] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The convergence in probability of the sequence of iterations of independent random quantum dynamical semigroups to the Markov process describing the evolution of open quantum system is studied. Statistical properties of the dynamics of open quantum systems with random generators of Markovian evolution are described in the terms of law of large numbers for operator valued random processes. For the compositions of independent random semigroups of complete positive operators the convergence of mean values to the semigroup described by the Gorini–Kossakowski–Sudarshan-Lindblad equation is obtained. Moreover, the convergence in probability of the sequence of random operator valued functions with values in the set of operators without the infinitely divisibility property to the operator valued function with values in the set of infinitely divisible operators is established.

Keywords: random linear operator, random operator valued function, operator valued random process, law of large numbers, infinitely divisible operator, open quantum system, Markovian process, Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad equation