ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 54–58

МАТЕМАТИКА

УДК 519.234.3

О КРИТЕРИЯХ РАЗЛИЧЕНИЯ ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА МАСШТАБА

© 2022 г. Е. О. Кантонистова[1,*], И. В. Родионов[2,]**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 02.12.2021 г.
Поступило 03.12.2021 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принято к публикации 16.01.2022 г.

В работе предложены критерии различения разделимых классов хвостов распределений, первый из которых инвариантен относительно параметра масштаба, а второй – относительно параметров сдвига и масштаба, а также доказана их состоятельность. Мы не предполагаем, что рассматриваемые распределения принадлежат какой-либо из областей максимального притяжения.

Ключевые слова: хвост распределения, критерий различения, статистика экстремумов, параметр масштаба, параметр сдвига, область максимального притяжения Гумбеля

DOI: 10.31857/S2686954322020114

1. ВВЕДЕНИЕ

При построении вероятностных моделей для описания рисков в страховой и финансовой сферах, природных явлений и катастроф, а также данных из других областей правильное оценивание хвостов распределений часто имеет определяющее значение. Основной метод работы с хвостами распределений предоставляет стохастическая теория экстремумов, которая позволяет построить модель хвоста распределения и экстраполировать ее за пределы доступных данных. Центральным результатом этой теории является теорема Фишера–Типпета–Гнеденко, или теорема об экстремальных типах. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с функцией распределения (ф.р.) F, а $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$ – вариационный ряд данной выборки. Теорема утверждает, что если для некоторых последовательностей констант $\{a_n > 0\}$ и $\{b_n\}$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad (1)$$

для некоторой невырожденной ф.р. $G(x)$, то найдутся такие константы $a > 0$, b и γ, что $G(ax + b) = EV_\gamma(x)$, где

$$EV_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}), & 1+\gamma x > 0, \gamma \ne 0, \\ \exp(-\exp(-x)), & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если (1) и (2) выполнены для ф.р. F, то говорят, что F принадлежит области максимального притяжения (о.м.п.) закона EV_γ, пишем $F \in \mathcal{D}(EV_\gamma)$. Параметр γ, называемый индексом экстремального значения, позволяет разделить распределения, удовлетворяющие условиям теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко, на три класса: класс $\gamma > 0$, называемый о.м.п. Фреше, класс $\gamma < 0$ (о.м.п. Вейбулла) и класс $\gamma = 0$ (о.м.п. Гумбеля).

По сравнению со статистическим оцениванием, проверке гипотез в статистике экстремальных значений посвящено не так много работ. Во многом это вызвано тем, что такие задачи, как оценивание высоких квантилей и вероятностей редких событий, можно решить без применения аппарата проверки гипотез для большого числа распределений, встречающихся на практике. А именно, метод заключается в оценивании параметров одной из общих моделей хвоста распределения, среди которых наиболее популярной является модель обобщенного распределения Парето, основанная на применении теоремы Пикандса–Балкема–де Хаана, см., например, монографии [1, 2]. Итак, пусть ф.р. F случайной величины X удовлетворяет условиям теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко, тогда для достаточно большого u

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
[2] *Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
*****E-mail: ekantonistova@hse.ru*
******E-mail: vecsell@gmail.com*

$$P(X - u \le x \mid X > u) \approx GP_\gamma(x/\sigma(u)),$$

где $\sigma(u)$ – некоторая положительная функция от u и

$$GP_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1+\gamma x)^{-1/\gamma}, & 1+\gamma x > 0, \\ x > 0, \quad \text{если} \quad \gamma \neq 0, \\ 1 - \exp(-x), x > 0, \quad \text{если} \quad \gamma = 0. \end{cases}$$

Если же иследователя интересует распределение максимума членов выборки, то для его оценивания, как правило, выбирается блочный метод Гумбеля (см. [1, 2]), основанный на приближении

$$P(X_{(n)} \le x) \approx EV_\gamma((x - \lambda_n)/\delta_n).$$

Подавляющее число работ по проверке гипотез в рамках стохастической теории экстремумов посвящено проверке гипотез о параметрах упомянутых выше моделей, а также о проверке выполнения условий теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко, см. обзоры [3, 4]. Данные модели показывают хорошее качество для распределений из о.м.п. Фреше и Вейбулла, однако не так хороши для анализа хвостов распределений из о.м.п. Гумбеля. Действительно, вне зависимости от того, каково поведение хвоста распределения вблизи правой крайней точки (а в о.м.п. Гумбеля лежат распределения с таким разным поведением хвоста, как логнормальное, экспоненциальное и нормальное), он оценивается с помощью приближения экспоненциальным распределением в модели обобщенного распределения Парето и распределением Гумбеля в блочном методе Гумбеля. Далее, обе эти модели основаны на теореме Фишера–Типпета–Гнеденко, а скорость сходимости в ней к распределению Гумбеля может быть крайне медленной (см. [5]). Кроме того, существуют распределения, для которых условия теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко не выполняются (например, распределения с супер-тяжелыми хвостами), что препятствует применению описанных методов. Тем самым, возникает потребность в расширении арсенала статистической теории экстремумов и рассмотрении других моделей, кроме EV_γ и GP_γ.

В 2000–2010 гг. появилось несколько моделей, расширивших арсенал методов статистической теории экстремумов, которые пока не так активно используются практиками. Прежде всего отметим модель, предложенную в работе [6]. Следуя описанию этой модели в работе [7], предположим, что хвост распределения случайной величины X (для простоты скажем, что $X \ge 1$ п.н.) записывается в виде

$$1 - F(x) = \exp(-V^{\leftarrow}(\ln x)), \quad x \ge 1, \qquad (3)$$

где $V^{\leftarrow}(x) := \inf\{y : V(y) \ge x\}$ – обобщенная обратная функция для $V(x) = \ln Q(e^{-x})$, где Q, в свою очередь, равна $F^{\leftarrow}$. При этом предполагается, что существует такая положительная функция a, что для всех $t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V(tx) - V(x)}{a(x)} = \frac{t^\theta - 1}{\theta},$$

где при $\theta = 0$ правую часть следует понимать как $\ln t$. Тем самым, V принадлежит классу $ERV(\theta)$ детальное описание которого см. в [1]. Заметим, что в случае $\theta > 0$ параметр θ управляет поведением хвоста распределения логвейбулловского типа, т.е. таких функций распределения F, что для всех $t > 0$ выполнено

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 - F(e^{tx}))}{\ln(1 - F(e^x))} = t^{1/\theta}.$$

Представителями этого класса являются, например, логнормальное распределение и функция распределения вида $F(x) = 1 - \exp(-(\ln x)^{1/\theta})$, $x > 1$. В случае, если $0 < \theta < 1$, то $F(x)$ принадлежит о.м.п. Гумбеля, а если $\theta = 1$, то о.м.п. Фреше (см. теорему 1 в [7]). Оценивание высоких квантилей и вероятностей редких событий в рамках этой модели можно найти в [6–9].

Еще одним классом распределений из о.м.п. Гумбеля, заслуживающим внимания, является класс распределений вейбулловского типа [10, 11]. Будем говорить, что ф.р. F имеет хвост типа Вейбулла, если существует $\theta > 0$ такое, что для всех $t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 - F(tx))}{\ln(1 - F(x))} = t^{1/\theta}.$$

Его представителями являются такие распределения, как экспоненциальное, Вейбулла, нормальное, гамма и многие другие. Модель (3), как и модели EV_γ и GP_γ, не являются хорошим описанием для распределений вейбулловского типа, поскольку для таких распределений и распределений с более легкими хвостами параметр θ в модели (3) равен 0. Оценки вероятностей редких событий и высоких квантилей для распределений вейбулловского типа предложены в работах [10–14] и других.

Тем самым, возникает необходимость в различении моделей хвостов распределений. Если работ по проверке гипотезы о принадлежности распределения о.м.п. Гумбеля против альтернативы, что распределение принадлежит о.м.п. Фреше, достаточно много (см. обзор таких критериев в [3, 15]), то в литературе обнаруживается почти полное отсутствие работ по различению распределений внутри о.м.п. Гумбеля. Здесь можно выде-

лить лишь работу [10], где предложен критерий проверки гипотезы о том, что распределение имеет хвост вейбулловского типа, а также работы [16, 17]. Насколько нам известно, задача проверки гипотезы о том, что распределение имеет хвост логвейбулловского типа, в литературе не рассматривалась. Наконец, отметим работу [18], в которой предложен критерий различения двух разделимых классов хвостов непрерывных распределений, не требующий принадлежности распределения какой-либо из областей максимального притяжения, и работу [19], где доказана применимость этого критерия для распределений, которые не являются непрерывными.

Однако статистики критериев из упомянутых работ не являются инвариантными к изменению параметра сдвига распределения, а относительно параметра масштаба являются инвариантными только критерии из работы [10]. Неточности в определении параметров сдвига и масштаба при анализе хвостов распределений из о.м.п. Гумбеля могут привести к серьезным ошибкам в выводах, поэтому возникает задача построения методов анализа хвостов распределений, инвариантных относительно этих параметров. Эта работа посвящена построению критериев различения классов хвостов распределений, обладающих указанным свойством.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С этого момента считаем, что все рассматриваемые нами распределения являются непрерывными и что их правая граничная точка равна $+\infty$. Пусть $u_F(t) = \inf\{x\colon F(x) \ge 1 - 1/t\}$ – квантильная функция F. По аналогии с B-условием из работы [18] (см. также [19]) введем следующее условие, необходимое для обоснования асимптотических свойств критериев этой работы.

Определение 1. Скажем, что функции распределения H и G удовлетворяют условию $B'(H,G)$ (B'-условию), если для некоторого t_0 существует $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что для каждого $t > t_0$ выполнено

$$\frac{(1 - H(cu_H(t)))^{1-\varepsilon}}{1 - G(cu_G(t))} \text{ не возрастает при } \quad c > 1. \quad (4)$$

Простым примером двух функций распределения, удовлетворяющих B'-условию, являются функции распределения закона Парето G_{α_1} и G_{α_2}, где $G_\alpha(x) = (1 - x^{-\alpha})I(x > 1)$ и $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда легко видеть, что дробь в (4) равняется $c^{\alpha_2 - (1-\varepsilon)\alpha_1} t^{-\varepsilon}$ и поэтому условие $B'(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2})$ выполнено при $t_0 = 1$ и $\varepsilon = (1 - \alpha_2/\alpha_1)/2$. Следующее определение является аналогом понятия B-разделимости классов хвостов распределений из работы [19].

Определение 2. Назовем классы хвостов распределений A_0 и A_1 B'-разделимыми (справа), если существует такая функция распределения F_0, что хвосты распределений из A_0 легче, чем хвост F_0, а для всех $H \in A_1$ выполнено условие $B'(F_0, H)$ для некоторых (возможно, различных) ε и t_0.

В случае если классы A_0 и A_1 B'-разделимы функцией распределения F_0, пишем, что они $B'(F_0)$-разделимы (справа).

В случае если хвосты распределений из класса A_0 тяжелее, чем хвосты из класса A_1, то будем говорить, что эти два класса являются $B'(F_0)$-разделимыми (слева), если для некоторой функции распределения F_0 хвосты распределений из A_0 тяжелее, чем хвост F_0, а для всех $H \in A_1$ выполнено условие $B'(H, F_0)$ для некоторых (возможно, различных) ε и t_0.

Так, несложно показать, что классы хвостов распределений вейбулловского и логвейбулловского типа B'-разделимы (и справа, и слева) посредством функции распределения

$$F_0(x) = (1 - \exp\{-\exp\{(\ln x)^{1/2}\}\})I(x > 1),$$

а классы хвостов распределений логвейбулловского типа с $\theta < 1$ и регулярно меняющихся хвостов распределений – посредством

$$F_0(x) = 1 - \exp(-\exp(\sqrt{\ln \ln x}) \ln x), \quad x > e.$$

2.1. Критерий различения классов хвостов распределений, инвариантный относительно параметра масштаба

Пусть классы хвостов распределений A_0 и A_1 $B'(F_0)$-разделимы справа. Предложим следующий критерий проверки $H_0 : F \in A_0$ против альтернативы $H_1 : F \in A_1$, инвариантный относительно параметра масштаба распределения

$$\text{если} \quad \tilde{R}_{k,n} > 1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \quad \text{то отвергнуть } H_0,$$

где статистика

$$\tilde{R}_{k,n} = \ln \frac{k}{n} - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln\left(1 - F_0\left(u_0(n/k) X_{(i)}/X_{(n-k)}\right)\right),$$

является модификацией статистики $R_{k,n}$ из работ [18] и [19], $u_0(t) = u_{F_0}(t)$, а $u_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ стандартного нормального распределения. Легко видеть, что распределение статистики $\tilde{R}_{k,n}$ не зависит от параметра масштаба распределения X_1. Если же классы A_0 и A_1 $B'(F_0)$-разделимы слева, то для проверки H_0: $F \in A_0$ против H_1: $F \in A_1$ будем использовать следующий критерий:

$$\text{если} \quad \tilde{R}_{k,n} < 1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{k}}, \quad \text{то отвергнуть } H_0.$$

Из следующих двух теорем легко вытекает, что если F_0 лежит либо в о.м.п. Гумбеля, либо в о.м.п. Фреше, то предложенный критерий асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на альтернативе H_1 соответственно.

Теорема 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р. случайные величины с ф.р. F_0. Пусть F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса принадлежности $\mathcal{D}(EV_\gamma)$ для* $\gamma \geq 0$ (*см.* [1])

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{(1 - F_0(x))F_0''(x)}{F_0'(x)^2} = -\gamma - 1. \qquad (5)$$

Пусть последовательность $k = k(n)$ такова, что

$$k \to \infty, \quad k/n \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \qquad (6)$$

Тогда

$$\sqrt{k}(\tilde{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \to \infty.$$

Заметим, что условию (5) удовлетворяют все распределения из $\mathcal{D}(EV_\gamma)$ с достаточно регулярным поведением хвоста на бесконечности (и, в частности, имеющие дифференцируемую функцию плотности в окрестности $+\infty$), например, такие, как экспоненциальное, нормальное и Парето, см. [1, Remark 1.2.8].

Теорема 2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р. случайные величины с ф.р. F_1. Пусть функция распределения F_0 удовлетворяет условию* (5)*, а последовательность $k = k(n)$ – условию* (6). *Если выполнено условие $B'(F_0, F_1)$, то*

$$\sqrt{k}(\tilde{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \to \infty;$$

если же выполнено $B'(F_1, F_0)$, то

$$\sqrt{k}(\tilde{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} -\infty, \quad n \to \infty.$$

2.2. Критерий различения классов хвостов распределений, инвариантный относительно параметров сдвига и масштаба

Критерий, предложенный в предыдущем разделе, как и критерии, упомянутые в конце Введения, имеют существенный для статистики экстремумов недостаток: они не являются инвариантными относительно параметра сдвига, что может существенно сказаться на области их применения. Целью этого раздела является предложить критерий различения разделимых классов хвостов распределений, который был бы инвариантен не только относительно параметра масштаба, но и параметра сдвига. Для построения критерия введем следующую статистику:

$$\hat{R}_{k,n} = \ln\frac{k}{n} - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n} \ln\left[1 - F_0(u_0(n/k) + \right.$$
$$\left. + \frac{X_{(i)} - X_{(n-k)}}{X_{(n-k)} - X_{(n-2k)}}(u_0(n/k) - u_0(n/(2k)))\right].$$

Обозначим

$$\sigma^2(\gamma) = 1 + \frac{2\gamma^2}{(\gamma+1)^2(2^\gamma - 1)^2}, \quad \gamma > 0,$$

и положим $\sigma^2(0) = 1 + (2(\ln 2)^2)^{-1}$. Асимптотические свойства статистики $\widehat{R}_{k,n}$ установлены в двух следующих теоремах.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sqrt{k}(\widehat{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\gamma)), \quad n \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2. *Если выполнено условие $B'(F_0, F_1)$, то*

$$\sqrt{k}(\widehat{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \to \infty;$$

если же выполнено условие $B'(F_1, F_0)$, то

$$\sqrt{k}(\widehat{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} -\infty, \quad n \to \infty.$$

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим два класса хвостов распределений A_0 и A_1, $B'(F_0)$-разделимых справа. Предложим следующий критерий проверки гипотезы H_0:

$$\text{если} \quad \hat{R}_{k,n} > 1 + \frac{\sigma(\gamma)u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \quad \text{то отвергнуть } H_0.$$

Этот критерий, очевидно, является инвариантным относительно параметров сдвига и масштаба по построению статистики $\widehat{R}_{k,n}$. Также, согласно теоремам 3 и 4, введенный критерий асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на альтернативе H_1. Критерий различения классов A_0 и A_1 в случае их $B'(F_0)$-разделимости слева строится аналогично предыдущему разделу.

Замечание 1. Отметим, что из теорем 1–4 следует, что элементы классов A_0 и A_1 (кроме функции распределения F_0 в случае ее принадлежности классу A_0) не обязаны принадлежать какой-либо из областей максимального притяжения.

Замечание 2. По аналогии с работой [20], теоремы 3, 4 могут быть использованы для построения на основе статистики $\hat{R}_{k,n}$ общего метода оценивания параметра хвоста рапределения, инвариантного относительно параметров сдвига и масштаба. Этот метод может быть использован, в частности, для оценивания вейбулловского и логвейбулловского индексов. Мы планируем обратиться к этой задаче в своих будущих исследованиях.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа над разделом 2.1 выполнена И.В. Родионовым за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00035) в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Haan L., Ferreira A.* Extreme Value Theory: An Introduction. N.Y.: Springer Verlag, 2006. 417 p. https://doi.org/10.1007/0-387-34471-3
2. *Beirlant J., Goegebeur Y., Teugels J., Segers J.* Statistics of Extremes: Theory and Applications. N.Y.: Wiley, 2004. 498 p. https://doi.org/10.1002/0470012382
3. *Hüsler J., Peng L.* Review of testing issues in extremes: in honor of Professor Laurens de Haan // Extremes. 2008. V. 11. P. 99–111. https://doi.org/10.1007/s10687-007-0052-0
4. *Gomes M.I., Guillou A.* Extreme Value Theory and Statistics of Univariate Extremes: A Review // International Statistical Review. 2015. V. 83. I. 2. P. 263–292. https://doi.org/10.1111/insr.12058
5. *Resnick S., de Haan L.* Second-order regular variation and rates of convergence in extreme-value theory // Annals of Probability. 1996. V. 24. I. 1. P. 97–124. https://doi.org/10.1214/aop/1042644709
6. *de Valk C.* Approximation of high quantiles from intermediate quantiles // Extremes. 2016. V. 19. P. 661–686. https://doi.org/10.1007/s10687-016-0255-3
7. *Albert C., Dutfoy A., Gardes L., Girard S.* An extreme quantile estimator for the log-generalized Weibull-tail model // Econometrics and Statistics. 2020. V. 13. P. 137–174. https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2019.01.004
8. *de Valk C.* Approximation and estimation of very small probabilities of multivariate extreme events // Extremes. 2016. V. 19. P. 687–717. https://doi.org/10.1007/s10687-016-0252-6
9. *de Valk C., Cai J.-J.* A high quantile estimator based on the log-generalized Weibull tail limit // Econometrics and Statistics. 2018. V. 6. P. 107–128. https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2017.03.001
10. *Goegebeur J., Guillou A.* Goodness-of-fit testing for Weibull-type behavior // Journal of Statistical Planning and Inference. 2010. V. 140. I. 6. P. 1417–1436. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2009.12.008
11. *Gardes L., Girard S., Guillou A.* Weibull tail-distributions revisited: a new look at some tail estimators // Journal of Statistical Planning and Inference. 2011. V. 141. I. 1. P. 429–444. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2010.06.018
12. *Broniatowski M.* On the estimation of the Weibull tail coefficient // Journal of Statistical Planning and Inference. 1993. V. 35. P. 349–366. https://doi.org/10.1016/0378-3758(93)90022-X
13. *Beirlant J., Broniatowski M., Teugels J.L., Vynckier P.* The mean residual life function at great age: applications to tail estimation // Journal of Statistical Planning and Inference. 1995. V. 45. P. 21–48. https://doi.org/10.1016/0378-3758(94)00061-1
14. *Gardes L., Girard S.* Estimating extreme quantiles of Weibull tail distributions // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2005. V. 35. I. 4. P. 1065–1080. https://doi.org/10.1081/STA-200056849
15. *Neves C., Fraga Alves M.I.* Testing extreme value conditions – an overview and recent approaches // REVSTAT–Statistical Journal. 2008. V. 6. P. 83–100.
16. *Rodionov I.V.* A discrimination test for tails of Weibull-type distributions // Theory of Probability and its Applications. 2018. V. 63. I. 2. P. 327–335. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T989076
17. *Rodionov I.V.* Discrimination of close hypotheses about the distribution tails using highest order statistics // Theory of Probability and its Applications. 2019. V. 63. I. 3. P. 364–380. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T989118
18. *Rodionov I.V.* On discrimination between classes of distribution tails // Problems of Information Transmission. 2018. V. 54. I. 2. P. 124–138. https://doi.org/10.1134/S0032946018020035
19. *Kogut N.S., Rodionov I.V.* On tests for distinguishing distribution tails // Theory of Probability and its Applications. 2021. V. 66. I. 3. P. 348–363. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990447
20. *Rodionov I.V.* Inferences on parametric estimation of distribution tails // Doklady Mathematics. 2019. V. 100. I. 2. P. 456–458. https://doi.org/10.1134/S1064562419040094

ON TESTS TO DISTINGUISH DISTRIBUTION TAILS INVARIANT WITH RESPECT TO THE SCALE PARAMETER

E. O. Kantonistova[a] and I. V. Rodionov[b]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[b] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia*

Presented by Acdemician of the RAS S.N. Vassilyev

We propose two tests to distinguish between separable classes of distribution tails, the first of those is invariant with respect to the scale parameter and the second is invariant with respect to both location and scale parameters. The asymptotical properties of the proposed tests are established. The belonging of distributions to any maximum domain of attraction is not assumed.

Keywords: distribution tail, discrimination test, statistics of extremes, scale parameter, location parameter, Gumbel maximum domain of attraction