ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 59–63

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ИНЪЕКЦИЕЙ СРЕДЫ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ О. А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

© 2022 г. М. А. Кисатов[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 14.10.2021 г.
Поступило 19.10.2021 г.
После доработки 19.10.2021 г.
Принято к публикации 08.02.2022 г.

Работа посвящена теореме существования единственного классического решения задачи Стефана, возникающей при изучении магнитогидродинамического пограничного слоя в вязкой среде с инъекцией модифицированной среды с реологическим законом О.А. Ладыженской.

Ключевые слова: пограничный слой жидкости, вязкая среда, реологический закон О.А. Ладыженской, задача Стефана, задача дифракции пограничного слоя

DOI: 10.31857/S2686954322020126

Изучение задач в областях с подвижными границами является важным направлением в теории дифференциальных уравнений с частными производными, при этом важность изучения этих задач также подчеркивается и многочисленными приложениями. О задачах Стефана см. работы [1, 2], а также литературу в этих работах.

В настоящей работе рассматривается задача Стефана, возникающая в теории магнитогидродинамического пограничного слоя реологически сложных сред. Предполагается, что жидкость с определенными свойствами обтекает пористую поверхность, через которую происходит инъекция жидкости с иными электромагнитными и реологическими свойствами (см. рис. 1). При этом жидкости не смешиваются и их разделяет некоторая поверхность, на которой возникают условия сопряжения параметров, определяющих жидкости. Эта поверхность находится в движении. Обоснование актуальности подобных задач с физической точки зрения можно найти, к примеру, в работе [3]. Похожая задача магнитогидродинамического пограничного слоя с условиями дифракции для двух жидкостей с различными реологическими свойствами была рассмотрена в работе [4]. В работе [5] рассматривалась задача дифракции с инъекцией дилатантной среды в пограничный слой (о дилатантной среде см. также [6]).

Слоистые неньютоновские жидкие среды рассматривались в работах [7–9]. Неоднородные неньютоновские жидкости изучались также в [10]. Модификация О.А. Ладыженской пограничного слоя неньютоновской жидкости изучена в работе [11]. Магнитная среда с реологическим законом О.А. Ладыженской исследовалась в [12], а аналогичная дилатантная жидкость рассматривалась в [13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, разделенной непрерывной кривой $\gamma = \{(x, y): y = y_*(x) > 0, 0 \le x \le X\}$ на области

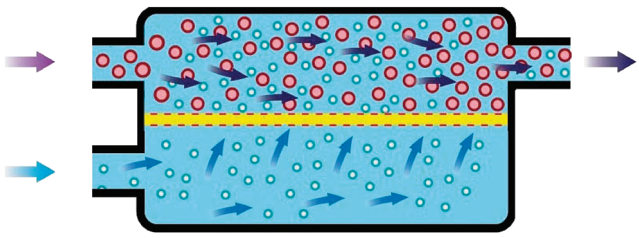

Рис. 1. Инъекция жидкости через мембрану.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: kisatov@mail.ru*

$$D_1 = \{0 < x < X,\ 0 < y < y_*(x)\} \quad \text{и}$$
$$D_2 = \{0 < x < X,\ y_*(x) < y < \infty\},$$

рассматривается краевая задача для уравнений пограничного слоя. В области D_1 рассматривается система уравнений

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu_1\left(1 + 3k\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_1}\frac{dp(x)}{dx} - \frac{\sigma_1}{\rho_1}B(x)(u_1B(x) + E(x)), \tag{1}$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

модифицированной электропроводной среды с реологическим законом О.А. Ладыженской, а в области D_2 – система уравнений

$$u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_2}\frac{dp(x)}{dx} - \frac{\sigma_2}{\rho_2}B(x)(u_2B(x) + E(x)), \tag{2}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

ньютоновской электропроводной среды.

В уравнениях k – малая положительная постоянная, $\nu_1 > 0$, ν_2 – вязкость соответствующей жидкости, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ – плотность среды, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ – соответствующая электропроводность, $B(x)$ – y-компонента вектора магнитной индукции, $E(x)$ – компонента вектора напряженности электрического поля, ортогональная плоскости XOY, $p(x)$ – давление.

Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} u_1(0,y) = u_{10}(y) \ \text{ при } \ 0 \le y \le y_*(0); \\ u_1(x,0) = 0, \quad v_1(x,0) = v_0(x), \\ u_2(0,y) = u_{20}(y) \ \text{ при } \ y_*(0) \le y < \infty; \\ u_2(x,y) \to U(x) \ \text{ при } \ y \to \infty, \end{gathered} \tag{3}$$

где значение $y_*(0)$ и функции $u_{10}(y)$, $u_{20}(y)$, $v_0(x)$, $U(x) > 0$ считаются заданными, причем $u_{i0}(y) \le U(0)$, $i = 1, 2$. Зададим на кривой γ условия сопряжения:

$$u_1(x, y_*(x)) = u_2(x, y_*(x)), \tag{4}$$

$$\nu_1\rho_1\frac{\partial u_1(x,y_*(x))}{\partial y}\left(1 + k\left(\frac{\partial u_1(x,y_*(x))}{\partial y}\right)^2\right) = \nu_2\rho_2\frac{\partial u_2(x,y_*(x))}{\partial y}. \tag{5}$$

Кривую γ будем считать гладкой линией тока. В силу этого выполнено

$$\frac{dy_*(x)}{dx} = \frac{v_1(x,y_*(x))}{u_1(x,y_*(x))} = \frac{v_2(x,y_*(x))}{u_2(x,y_*(x))}. \tag{6}$$

В задаче (1)–(6) неизвестными являются функции $u_i(x,y)$, $v_i(x,y)$, $y_*(x)$, $i = 1, 2$. Поскольку граница γ является неизвестной, то рассматриваемая задача является задачей типа Стефана.

Давление $p(x)$ можно исключить из уравнений, выразив через скорость внешнего потока $U(x) > 0$, используя соотношение

$$-\frac{dp(x)}{dx} - \sigma_2B(x)E(x) = \rho_2U(x)\frac{dU(x)}{dx} + \sigma_2B^2(x)U(x).$$

Введем новые обозначения

$$u_0(y) = \begin{cases} u_{10}(y), & 0 \le y \le y_*(0), \\ u_{20}(y), & y_*(0) < y < \infty, \end{cases}$$
$$\nu(y) = \begin{cases} \nu_1, & 0 < y \le y_*(x), \\ \nu_2, & y_*(x) < y < \infty, \end{cases}$$
$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$
$$v(x,y) = \begin{cases} v_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ v_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

и приведем определение обобщенного решения задачи (1)–(6).

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) в области D называются функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, $y_*(x)$, $(x,y) \in D$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $u(x,y)$ положительна при $y > 0$, непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, ограничена; $v(x,y)$ принадлежит пространству $L_2^{loc}(D)$ и непрерывна по y при $y = 0$;

2) существуют обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ ограничена, производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ принадлежат пространству $L_2^{loc}(D)$;

3) $u(0,y) = u_0(y)$, $u(x,0) = 0$, $u(x,y) \to U(x)$ при $y \to \infty$, $v(x,0) = v_0(x)$;

4) для любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$, имеющей непрерывную производную $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$ и равной нулю при $y = 0$ и при достаточно больших y, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\iint\limits_D \left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho(x,y)}\frac{dp(x)}{dx}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma(x,y)}{\rho(x,y)}B(x)(uB(x)+E(x))\right)\varphi+$$
$$\left.+\nu(y)\left(1+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]dxdy=0,$$

где $\rho(x,y)\equiv\rho_i$, $\sigma(x,y)\equiv\sigma_i$ при $(x,y)\in D_i$, $i=1,2$;

5) справедливо равенство

$$\frac{dy_*(x)}{dx}=\frac{v(x,y_*(x))}{u(x,y_*(x))};$$

6) почти всюду в области D выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что функции* $p'(x)$, $v_0(x)$, $B(x)$, $E(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $0\le x\le X$, $u_{i0}(y)$, $u'_{i0}(y)$, $u''_{i0}(y)$, $i=1$, 2, *ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера,* $u'_{10}(0)>0$, $u_{20}(y)\to U(0)$ *при* $y\to\infty$, $u_{i0}(y)\le U(0)$, $i=1,2$, *выполняются равенства*

$$u_{10}(y_*(0))=u_{20}(y_*(0)),$$
$$\nu_1\rho_1u'_{10}(y_*(0))(1+k(u'_{10}(y_*(0)))^2)=\nu_2\rho_2u'_{20}(y_*(0))$$

и условие согласования в точке (0, 0)

$$\nu_1\left(1+\frac{3}{4}k(u'_{10}(y))^2\right)u''_{10}(y)-v_0(0)u'_{10}(y)-$$
$$-\frac{p'(0)}{\rho_1}-\frac{\sigma_1}{\rho_1}B^2(0)u_{10}(y)-$$
$$-\frac{\sigma_1}{\rho_1}B(0)E(0)=O(y^2)\quad \textit{при}\quad y\to 0.$$

Тогда при некотором $X>0$ *существует обобщенное решение задачи* (1)–(6). *Если, кроме того, выполняется неравенство*

$$\frac{dp(x)}{dx}+\sigma_iB(x)E(x)\le-\beta_0<0,$$

где $\beta_0=\mathrm{const}$, *то решение существует при любом* $X>0$. *Если же выполнены условия*

$$\frac{dp(x)}{dx}+\sigma_iB(x)E(x)\le 0,\quad v_0(x)\ge 0,$$

то решение задачи (1)–(6) *единственно.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Для доказательства основного результата введем замену фон Мизеса

$$x=x,\quad \psi=\psi(x,y),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u(x,y),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_0(x)-v(x,y),\quad \psi(x,0)=0,$$
$$w_i(x,\psi)=u_i^2(x,y),\quad i=1,2,$$

при которой системы уравнений (1), (2) преобразуются в квазилинейные уравнения

$$\nu_1\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^2\right)\sqrt{w_1}\frac{\partial^2w_1}{\partial\psi^2}-$$
$$-\frac{\partial w_1}{\partial x}-v_0(x)\frac{\partial w_1}{\partial\psi}-\frac{2\sigma_1B^2(x)}{\rho_1}\sqrt{w_1}- \tag{7}$$
$$-\frac{2}{\rho_1}\left(\frac{dp(x)}{dx}+\sigma_1B(x)E(x)\right)=0$$

в области $\Omega_1=\{0<x<X,\ 0<\psi<\psi_*(x)\}$ и

$$\nu_2\sqrt{w_2}\frac{\partial^2w_2}{\partial\psi^2}-\frac{\partial w_2}{\partial x}-v_0(x)\frac{\partial w_2}{\partial\psi}-\frac{2\sigma_2B^2(x)}{\rho_2}\sqrt{w_2}-$$
$$-\frac{2}{\rho_2}\left(\frac{dp(x)}{dx}+\sigma_2B(x)E(x)\right)=0 \tag{8}$$

в области $\Omega_2=\{0<x<X,\ \psi_*(x)<\psi<\infty\}$. Граничные условия (3) переходят в условия

$$\begin{gathered}w_1(0,\psi)=w_{10}(\psi),\quad 0\le\psi\le\psi_*(0);\\ w_1(x,0)=0,\quad w_2(0,\psi)=w_{20}(\psi),\\ \psi_*(0)\le\psi<\infty,\\ w_2(x,\psi)\to U^2(x)\quad\text{при}\quad\psi\to\infty,\end{gathered} \tag{9}$$

условия сопряжения (4), (5) переходят при $\psi=\psi_*(x)$, $0\le x\le X$ в условия

$$\begin{gathered}w_1(x,\psi_*(x))=w_2(x,\psi_*(x)),\\ \nu_1\rho_1\frac{\partial w_1(x,y_*(x))}{\partial\psi}\left(1+\frac{k}{4}\left(\frac{\partial w_1(x,\psi_*(x))}{\partial\psi}\right)^2\right)=\\ =\nu_2\rho_2\frac{\partial w_2(x,\psi_*(x))}{\partial\psi},\end{gathered} \tag{10}$$

а неизвестная граница γ – в известную границу

$$\Gamma=\{(x,y)\colon \psi=\psi_*(x)\equiv\psi(x,y_*(x)),\ 0\le x\le X\},$$

где функция $\psi_*(x)$ находится из соотношений

$$\psi_*(x) = \psi_*(0) + \int_0^x v_0(s)ds,$$

$$\psi_*(0) = \int_0^{y_*(0)} u_{10}(\tau)d\tau, \quad 0 \le x \le X.$$

Введем обозначения

$$\rho \equiv \rho(x,\psi) = \begin{cases} \rho_1, & 0 < \psi \le \psi_*(x), \\ \rho_2, & \psi_*(x) < \psi < \infty, \end{cases}$$

$$\sigma \equiv \sigma(x,\psi) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 < \psi \le \psi_*(x), \\ \sigma_2, & \psi_*(x) < \psi < \infty. \end{cases}$$

Далее доказываются теоремы существования и единственности решений полученной задачи (7)–(10) в следующей формулировке.

Теорема 2. *Если выполнены предположения теоремы* 2, *то обобщенное решение* $w(x,\psi)$ *задачи* (7)–(10) *существует, причем* $w(x,\psi) \to U^2(x)$ *при* $\psi \to \infty$ *равномерно на отрезке* $0 \le x \le X$, *а при* $0 \le \psi \le \psi_1$ *выполняется неравенство*

$$\left| w^{\beta_1 - 1} \frac{\partial w}{\partial x} \right| \le C, \quad 0 < \beta_1 < \frac{1}{2}, \quad C = \text{const}.$$

Теорема 3. *Если* $v_0(x) \ge 0$ *и* $\dfrac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0$, *то решение* $w(x,\psi)$, *полученное в теореме* 2, *единственно.*

Полученное в теореме 2 обобщенное решение $w(x,\psi)$ при $\psi > \psi_*(x) + \Delta$ имеет обычные производные $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial \psi}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$, которые ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера. Поэтому функция $w(x,\psi)$ является решением уравнения (8) в классическом смысле.

На основе теорем 2 и 3 с помощью обратной замены переменных получаем доказательство основного результата.

Замечание 1. За счет связи градиентов давления и скорости внешнего течения, неравенство $\dfrac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0$ эквивалентно неравенствам $\rho_i \dfrac{dU(x)}{dx} + \sigma_i B^2(x) \ge 0$, $i = 1, 2$, которые выполняются при достаточно большом $B^2(x)$. Последнее неравенство означает, что достаточно сильное поперечное магнитное поле предотвращает отрыв пограничного слоя вязкой электропроводной среды. О предотвращении отрыва пограничного слоя см. [12] (а также [14, 15]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oleinik O.A.* On Stefan–type free boundary problems for parabolic equations. In: Seminary 1962–1963 di analisi, algebra, geometria e topologia, 1. Roma. 1965. P. 388–403.
2. *Oleinik O.A., Primicerio M., Radkevich E.V.* Stefan-like problems // Meccanica. 1993. V. 28. P. 129–143.
3. *Ватажин А.Б.* О вдувании в пограничный слой в присутствии магнитного поля электропроводной жидкости или газа // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 909–911.
4. *Самохин В.Н.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с условиями дифракции // Дифф. уравнения. 1997. Т. 33. № 8. С. 1106–1113.
5. *Самохин В.Н.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией дилатантной среды // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 846–858.
6. *Самохин В.Н.* О системе уравнений стационарного пограничного слоя дилатантной среды // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1989. Вып. 14. С. 89–108.
7. *Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* Просачивание пограничного слоя ньютоновской жидкости через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа. 2010. Т. 45. С. 93–102.
8. *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский матем. журн. 2011. Т. 3. № 3. С. 93–104.
9. *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* Усреднение стратифицированной дилатантной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 48. С. 75–83.
10. *Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S.* Nematodynamics and Random Homogenization // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 10. P. 2243–2253.
11. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 329–361.
12. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа. Т. 92. С. 83–100.
13. *Самохин В.Н.* О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя дилатантной среды // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 328–336.
14. *Хуснутдинова Н.В.* Об условиях существования безотрывного пограничного слоя при возрастающем давлении // ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1095–1099.
15. *Хуснутдинова Н.В.* Математические вопросы управления пограничным слоем с помощью отсосов // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. № 2. С. 485–489.

ON THE STEFAN PROBLEM FOR A SYSTEM OF EQUATIONS OF A MAGNETOHYDRODYNAMIC BOUNDARY LAYER WITH INJECTION OF A MEDIUM WITH RHEOLOGICAL LAW OF O. A. LADYZHENSKAYA

A. M. Kisatov[a]

[a] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The work is devoted to the existence theorem for a unique classical solution of the Stefan problem, which arises in the study of a magnetohydrodynamic boundary layer in a viscous medium with injection of a modified medium with the rheological law of O.A. Ladyzhenskaya.

Keywords: boundary layer of fluids, viscous medium, rheological law of O.A. Ladyzhenskaya, Stefan's problem, boundary layer diffraction problem