ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 67–69

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. А. Н. Коненков[1,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 11.01.2022 г.
Поступило 19.01.2022 г.
После доработки 19.01.2022 г.
Принято к публикации 22.01.2022 г.

Рассматривается первая краевая задача для одномерной по пространственной переменной параболической системы второго порядка в области с негладкими боковыми границами. Область может быть ограниченной или полуограниченной. Коэффициенты системы удовлетворяют условию Гёльдера и зависят только от пространственной переменной. Начальная и граничная функции предполагаются непрерывными и ограниченными. Устанавливаются существование и единственность классического решения этой задачи.

Ключевые слова: параболическая система, первая краевая задача, негладкая боковая граница, классическое решение

DOI: 10.31857/S2686954322020138

Для параболических уравнений второго порядка единственность классического решения первой краевой задачи следует из принципа максимума. Под классическим решением в области Ω здесь и далее понимается ограниченная функция из класса $C^{2,1}_{x,t}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая в Ω уравнению, а на параболической границе области – начальному и граничному условиям. В случае, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют только условию Гёльдера, существование классического решения первой краевой задачи с непрерывной граничной функцией устанавливается в [1, гл. 3, §4]. Доказательство проводится методом барьеров, который также использует принцип максимума. Однако для параболических систем принцип максимума, вообще говоря, не имеет места [2]. Отметим, что если старшие коэффициенты уравнения имеют производную по пространственной переменной, удовлетворяющую условию Гёльдера, то существование решения может быть установлено с помощью потенциала двойного слоя.

Однозначная разрешимость краевых задач в анизотропных пространствах Гёльдера для широкого класса параболических систем установлена в [3]. При этом рассматривались достаточно гладкие решения: все производные решения, входящие в систему, предполагались непрерывными в замыкании области.

Существование и единственность решения первой и второй краевых задач для параболических систем в ограниченной области на плоскости в классе $C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$ получена в [4–6]. От граничной функции требовалось существование непрерывной производной порядка 1/2, обращающейся в нуль при $t = 0$. Для систем с дифференцируемыми коэффициентами в [7] доказана единственность первой краевой задачи в полуограниченной области в $C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$. Существование решения этой задачи следует из [8]. Во всех этих работах рассматривались области с криволинейными и негладкими, вообще говоря, боковыми границами.

В настоящей работе для параболической системы с одной пространственной переменной исследуются вопросы существования и единственности классического решения первой краевой задачи с непрерывными функциями в начальном и граничном условиях. Область может быть ограниченной или полуограниченной, а ее боковая граница – негладкой.

В полосе $D = \mathbb{R}\times(0,T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболический оператор

$$Lu = \partial_t u - A(x)\partial_x^2 u - B(x)\partial_x u - C(x)u, \qquad (1)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – матрицы размером $m \times m$ с элементами $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$, $c_{ij}(x)$ соответственно. Для оператора L предполагается

[1] *Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, Рязань, Россия*
**E-mail: a.konenkov@365.rsu.edu.ru*

выполненным условие равномерной параболичности, т.е. собственные значения $\lambda_k(x)$ матрицы $A(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\lambda_k(x) \geq \mu > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m; \tag{2}$$

коэффициенты действительны, ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера:

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

В полосе D рассматриваем полуограниченную область

$$\Omega = \{(x,t) \in D \mid x > g(t), 0 < t < T\}$$

с основанием $\Omega_0 = \bar{\Omega} \cap \{t = 0\}$ и боковой границей

$$\Sigma = \{(x,t) \in D \mid x = g(t), 0 < t < T\},$$

где функция g удовлетворяет условию

$$g \in C^{(1+\alpha)/2}([0,T]), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

В области Ω рассматриваем первую краевую задачу

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u\big|_{\Sigma} = \psi, \quad u\big|_{t=0} = h. \tag{5}$$

Для множества $E \subset \bar{D}$ обозначим через $C(E)$ пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $f : E \to \mathbb{R}^m$ с нормой

$$|f|_{0,E} = \sup_{(x,t)\in E} |f(x,t)|$$

и положим $\overset{\circ}{C}(E) = \{f \in C(E) \mid f|_{t=0} = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть для оператора L выполнены условия* (2), (3), *а для боковой границы области Ω условие* (4). *Если $\psi \in C(\Sigma)$, $h \in C(\Omega_0)$ и выполнено условие согласования $\psi(g(0)) = h(g(0))$, то существует и единственно классическое решение $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ задачи* (5). *Оно удовлетворяет оценке*

$$|u|_{0,\Omega} \leq C(|\psi|_{0,\Sigma} + |h|_{0,\Omega_0}).$$

При наложенных условиях (2), (3) на коэффициенты для оператора L существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,\xi,t-\tau)$ [9, гл. 1, § 3].

Для доказательства существования решения мы вводим потенциал

$$W\varphi(x,t) = \int_0^t K(x, g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{6}$$

с ядром

$$K(x,\xi,t) = \partial_{\xi}(\Gamma(x,\xi,t)A(\xi)).$$

Теорема 2. *Функция $\Gamma(x,\xi,t)A(\xi)$ дифференцируема по ξ в полупространстве $t > 0$. Функция K удовлетворяет уравнению $L_{x,t}K(x,\xi,t) = 0$ и справедливы оценки*

$$|\partial_t^l \partial_x^m K(x,\xi,t)| < C_{l,m} t^{-(m+2l+2)/2} e^{-c_{l,m}(x-\xi)^2/t}, \quad m \leq 2, \quad l \geq 0, \tag{7}$$

при $t > 0$, $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Функция $W : \varphi \to W\varphi$ отображает пространство $\overset{\circ}{C}(\Sigma)$ в $\overset{\circ}{C}(\bar{\Omega})$, причем*

$$|W\varphi|_{0,\bar{\Omega}} \leq C|\varphi|_{0,\Sigma}.$$

Для плотности $\varphi \in C(\Sigma)$ справедлива формула скачка

$$W^{\pm}\varphi(g(t),t) = \pm\frac{\varphi(t)}{2} + W^0\varphi(g(t),t), \quad 0 < t \leq T, \tag{8}$$

где $W^{\pm}\varphi$ – предельные значения при приближении к точке $(g(t),t)$ справа и слева, а $W^0\varphi$ – прямое значение потенциала $W\varphi$ на кривой $x = g(t)$.

Таким образом, $W\varphi$ обладает многими свойствами потенциала двойного слоя и так же, как последний, может использоваться для решения первой краевой задачи.

С помощью потенциала типа Пуассон [9, гл. 1, 4] задачу (5) можно свести к задаче с нулевой начальной функцией:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \; u|_{\Sigma} = \psi, \; u|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Будем искать решение этой задачи u в виде потенциала (6) с непрерывной плотностью φ. В силу формулы скачка (8) нахождение u сводится к решению интегрального уравнения Вольтерры второго рода с ядром, имеющим слабую особенность.

Теорема 4. *Пусть для оператора L выполнены условия* (2), (3), *а для боковой границы области Ω* условие (4). *Если $\psi \in \overset{\circ}{C}(\Sigma)$, то существует и единственно классическое решение $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap \overset{\circ}{C}(\bar{\Omega})$ задачи* (9). *Оно удовлетворяет оценке*

$$|u|_{0,\Omega} \leq C|\psi|_{\Sigma}.$$

Существует функция $\varphi \in \overset{\circ}{C}(\Sigma)$ такая, что $u = W\varphi$ в Ω.

Также мы рассматриваем первую краевую задачу в ограниченной области

$$\Omega = \{(x,t) \in D \mid g_1(t) < x < g_2(t), 0 < t < T\}$$

с боковыми границами

$$\Sigma_i = \{(x,t) \in D \mid x = g_i(t), 0 < t < T\}, \quad i = 1, 2,$$

где функции g_i удовлетворяют условиям

$$g_i \in C^{(1+\alpha)/2}([0,T]), \quad g_1(t) < g_2(t), \quad t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{10}$$

Теорема 5. *Пусть для оператора L выполнены условия* (2), (3), *а для боковых границ области* Ω *условие* (10). *Если* $\psi_i \in C(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$, $h \in C(\Omega_0)$ *и выполнены условия согласования* $\psi_1(g_1(0)) = h(g_1(0))$, $\psi_2(g_2(0)) = h(g_2(0))$, *то существует классическое решение первой краевой задачи*

$$Lu = 0 \quad в \quad \Omega, \quad u|_{\Sigma_1} = \psi_1,$$
$$u|_{\Sigma_2} = \psi_2, \quad u|_{t=0} = h.$$

Оно удовлетворяет оценке

$$|u|_{0,\Omega} \le C(|\psi_1|_{0,\Sigma_1} + |\psi_2|_{0,\Sigma_2} + |h|_{0,\Omega_0}).$$

При $h \equiv 0$ *существуют функции* $\varphi_i \in \overset{\circ}{C}(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$, *такие, что решение представляется в виде суммы потенциалов:* $u = W_1\varphi_1 + W_2\varphi_2$ *в* Ω, *где*

$$W_i\varphi_i(x,t) = \int_0^t K(x, g_i(\tau), t-\tau)\varphi_i(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность академику РАН Е.И. Моисееву и проф. И.С. Ломову за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Наука, 1968. 428 с.
2. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4. С. 458–480.
3. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН. 1965. Т. 83. С. 3–163.
4. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравн. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
5. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
6. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравн. 2021. Т. 57. № 8. С. 625–634.
7. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей // Дифференц. уравн. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
8. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
9. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.

CLASSICAL SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS ON THE PLANE

A. N. Konenkov[a]

[a] *Ryazan State University named for S. Yesenin, Ryazan, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev The first boundary value problem for a second-order parabolic system with one spatial variable in a domain with nonsmooth lateral boundaries is considered. The domain can be bounded or semi-bounded. The coefficients of the system depend only on the spatial variable and satisfy the Holder condition. The initial and boundary functions are assumed to be continuous and bounded. The existence and uniqueness of the classical solution of this problem is established.

Keywords: parabolic system, first boundary value broblem, nonsmotth lateral boundary, classical solution