ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 64–66

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА

© 2022 г. А. И. Кожанов[1,*], А. Н. Артюшин[1,**], В. В. Шубин[2,***]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 27.11.2021 г.
Поступило 02.12.2021 г.
После доработки 02.12.2021 г.
Принято к публикации 03.02.2022 г.

В работе изучается разрешимость начально-краевых задач для линейных параболических уравнений второго порядка с вырожденным граничным условием третьего рода. Приводятся достаточные условия существования и единственности решений. Показывается, что эффект вырождения может привести к неединственности решений в пространстве $W_2^{2,1}$.

Ключевые слова: параболические уравнения второго порядка, краевые задачи, вырожденное граничное условие третьего рода, единственность и неединственность решений, существование решений

DOI: 10.31857/S268695432202014X

Постановка задачи. Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$ конечной высоты T, S есть его боковая граница. Третья начально-краевая задача для параболических уравнений второго порядка в общей постановке – см., например, [1, 2] – представляет собой задачу нахождения решения соответствующего уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, а также условию

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial \nu}+b(x,t)u\Big|_S=g(x,t)$$

($\frac{\partial}{\partial\nu}$ – производная по направлению конормали к границе Γ в текущей точке) на боковой поверхности S. Если в этой задаче выполняется $|a(x,t)|\ge a_0>0$, то, как хорошо известно, она будет корректной [1] в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$. Ситуация может принципиально измениться, если функция $a(x,t)$ обращается в нуль в каких-либо точках $\bar{S}$. Именно такая ситуация будет анализироваться в настоящей работе. Все рассуждения и выкладки будут проведены для модельного одномерного случая. Более общий случай – случай уравнений с многими пространственными переменными, уравнений с младшими коэффициентами, и т.п. – исследуется лишь с незначительными изменениями по отношению к нижеприведенному.

Итак, пусть $n=1$, Ω есть интервал (0, 1) оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$. Далее, пусть $f(x,t)$, $a(t)$ и $g(t)$ есть заданные функции, определенные при $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t-u_{xx}=f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0,\quad x\in(0,1), \tag{2}$$

$$a(t)u_x(0,t)+u(0,t)=g(t), \tag{3}$$

$$u(1,t)=0. \tag{4}$$

Всюду ниже будем считать, что функция $a(t)$ неотрицательна на отрезке $[0,T]$ (точные условия будут указаны ниже). Заметим, что условие (3) в изучаемой ситуации не позволяет получить обычные энергетические оценки [1, 3, 4] решений в пространствах С.Л. Соболева, и что условия [1], дающие оценку максимума модуля решений, здесь также не выполняются. Тем самым вопрос о существовании и единственности решений задачи (1)–(4) становится нетривиальным.

Единственность и неединственность решений. Покажем, как можно по-

[1] *Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
**E-mail: kozhanov@math.nsc.ru*
***E-mail: alexsp3@yandex.ru*
****E-mail: vlad.v.shubin@gmail.com*

строить нетривиальные решения однородной задачи (1)–(4).

Пусть $\varphi(t)$ есть определенная при $t \geq 0$ непрерывная функция такая, что $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi(0) \geq 0$. Положим

$$v(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds +$$

$$+\frac{1-x}{4\pi}\int_0^t e^{-\frac{(1-x)^2}{4(t-s)}}\frac{ds}{\sqrt{(t-s)^3}}\int_0^s e^{-\frac{1}{4(s-\tau)}}\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{s-\tau}}d\tau.$$

Для функции $v(x,t)$ выполняются уравнение (1) при $f(x,t) \equiv 0$, условие (2), а также условие (4). Также можно установить, что при $t \to 0$

$$v(0,t) = -\frac{1+o(1)}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds, \tag{5}$$

$$v_x(0,t) = \varphi(t)(1+o(1)). \tag{6}$$

Положим $a(t) = -\dfrac{v(0,t)}{v_x(0,t)}$. В силу (5), (6) при достаточно малых положительных t выполнено $a(t) > 0$, причем $a(0) = 0$. Таким образом, $v(x,t)$ является нетривиальным решением однородной задачи (1)–(4) для данного $a(t)$.

Далее, выбирая $\varphi(t) = t^m$, $m \geq 0$, получим, что $a(t) \sim C\sqrt{t}$ при $t \to 0$ для некоторого $C > 0$. Выбирая $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{t^m}}$, $m > 0$ и используя метод Лапласа [1, 5], получим, что

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds = \sqrt{t}\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^m(1-\tau)^m}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} =$$

$$= 2\sqrt{t}\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^m(1-s^2)^m}}ds \sim Ct^{\frac{m+1}{2}}e^{-\frac{1}{t^m}},$$

т.е. $a(t) \sim Ct^{\frac{m+1}{2}}$ при $t \to 0$. Таким образом, для любого $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ найдется $a(t)$ такая, что $a(t) \sim Ct^{\alpha}$ при $t \to 0$, и однородная задача (1)–(4) имеет нетривиальное решение.

Определим множество единственности решений краевой задачи (1)–(4).

Пусть $\delta \geq 0$, $\mu > 0$. Введем обозначения

$$h_{\delta,\mu}(t) = e^{\mu\int_t^T \frac{ds}{(a(s)+\delta)^2}}, \quad h_\mu(t) = h_{0,\mu}(t).$$

Для $p > 1$ определим пространство $V_{p,\mu}$:

$$V_{p,\mu} = \Big\{u(x,t) \in L_p(Q)\colon \int_Q \frac{h_\mu(t)}{a^2(t)}|u(x,t)|^p\,dQ < +\infty,$$

$$\int_Q h_\mu(t)|u_x(x,t)|^p\,dQ < \infty,$$

$$\int_Q a^{2(p-1)}(t)h_\mu(t)|u_{xx}(x,t)|^p\,dQ < \infty,$$

$$\int_Q a^{2(p-1)}(t)h_\mu(t)|u_t(x,t)|^p\,dQ < \infty\Big\}.$$

Теорема 1. *Краевая задача* (1)–(4) *не может иметь более одного решения в пространстве* $V_{p,\mu}$ *при* $p > 1$, $\mu = \dfrac{p^3}{4(p-1)}$.

Доказательство основано на анализе равенства

$$\int_0^t\int_0^1 (u_\tau - u_{xx})h_{\delta,\mu}(\tau)|u|^{p-2}u\,dx\,d\tau = 0,$$

в котором $\delta > 0$, с использованием интегрирования по частям и предельного перехода при $\delta \to 0$.

Перейдем к исследованию разрешимости краевой задачи (1)–(4). Уточним, что нашей целью является доказательство существования решения, имеющего все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad \int_Q h_\mu(t)f^2(x,t)dQ < \infty,$$

$$g(t) \in W_2^1(0,T),$$

$$\int_0^T \frac{h_\mu(t)}{a(t)}g^2(t)dt < \infty,$$

$$\int_0^T a(t)h_\mu(t)(g'(t))^2dt < \infty \text{ для некоторого } \mu > 2;$$

$$a(t) \in C[0,T] \cap C^1(0,T], \quad a(0) = 0,$$

$$a(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$a(t)|a'(t)| \leq a_0 \quad \text{для некоторого } a_0 > 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(4), *принадлежащее пространству* $V_{2,\mu}$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью метода регуляризации с использованием априорных оценок и предельного перехода.

В целом аналогичные вышеприведенным результаты получены и для вырождающейся третьей начально-краевой задачи для гиперболических уравнений второго порядка (как в одномерном, так и в многомерном по пространственным переменным случаях).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке (соглашение № 075-15-2019-1613 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
4. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

BOUNDARY PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATE BOUNDARY CONDITION OF THE THIRD KIND

A. I. Kozhanov[a], A. N. Artyushin[a], and V. V. Shubin[b]

[a] *S.L. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

[b] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

The paper studies the solvability of initial - boundary value problems for linear parabolic equations of the second order with a degenerate boundary value condition of the third kind. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions are given. It is shown that the degeneration effect can lead to non-uniqueness of solutions in the space $W_2^{2,1}$.

Keywords: second order parabolic equations, boundary value problems, degenerate boundary condition of the third kind, uniqueness and non-uniqueness of solutions, existence of solutions