ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 70–75

МАТЕМАТИКА

УДК 517.922

О РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

© 2022 г. В. С. Самовол[1,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 13.04.2021 г.
Поступило 18.04.2021 г.
После доработки 28.12.2021 г.
Принято к публикации 21.01.2022 г.

Рассматривается широкий класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с коэффициентами в виде сходящихся степенных рядов в окрестности начала координат. Известны методы степенной геометрии и основанные на них алгоритмы вычисления степенно-логарифмических рядов (рядов Дюлака), формально удовлетворяющих таким уравнениям. Доказывается достаточное условие сходимости таких формальных решений.

Ключевые слова: многоугольник Ньютона, продолжаемое решение, формальное решение, ряд Дюлака, сходимость

DOI: 10.31857/S2686954322020151

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье исследуются обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\begin{gathered} f(x,Y)=0, \quad f(x,Y)=\sum_{|I|=0}^{M} a_I(x)Y^I, \\ Y=(y,y',\ldots,y^{(n)}), \quad y=y(x), \quad x,y\in\mathbb{C}, \\ I=(i_0,i_1,\ldots,i_n), \quad i_0,i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{Z}_+, \\ |I|=i_0+i_1+\ldots+i_n, \\ Y^I=y^{i_0}(y')^{i_1}\ldots(y^{(n)})^{i_n}, \end{gathered} \tag{1}$$

$\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел,

функции $a_I(x)$ могут быть представлены в виде равномерно и абсолютно сходящихся в окрестности точки $x=0$ степенных рядов

$$\begin{gathered} a_I(x)=\sum_{m=1}^{\infty} a_{Im}x^{p_{Im}}, \quad a_{Im},p_{Im}=\text{const}, \\ a_{Im}\in\mathbb{C}, \quad p_{Im}\in\mathbb{R}, \\ p_{Im}<p_{I(m+1)}, \quad \lim_{m\to\infty} p_{Im}=+\infty. \end{gathered} \tag{2}$$

В (2) под степенными рядами понимаются такие ряды, в которых показатели степеней вещественные, но не обязательно целые числа.

В данной работе мы считаем, что x принадлежит некоторому открытому сектору V с вершиной в нуле и произвольным раствором, меньшим 2π. Под сходимостью рядов в V-окрестности точки $x=0$ понимается сходимость в области, являющейся пересечением окрестности точки $x=0$ с сектором V.

В отличие от классической задачи Коши будем искать решения, которые определены в некоторой V-окрестности точки $x=0$ (так называемые продолжаемые решения), имеют степенную асимптотику при $x\to 0$ и могут быть разложены в V-окрестности начала координат в сходящийся ряд.

В [1] предложен алгоритм вычисления формальных решений уравнения (1) в виде рядов (степенных или степенно-логарифмических) в случае, когда функции $a_I(x)$ являются суммами степенных мономов. Там же был поставлен вопрос о сходимости этих рядов. Для некоторых известных уравнений (уравнений Пенлеве и уравнения Риккати) эта задача была решена (см., например, [2–4]). В [1] было предложено достаточное условие сходимости степенных разложений формальных решений уравнения вида (1). Ниже это условие будет сформулировано применительно к формальным решениям уравнения (1) в виде степенно-логарифмических рядов (рядов Дюлака). Для формулировки этого условия необходимо описать процедуру вычисления первого приближения решения. Эта процедура базируется на понятии многоугольника Ньютона N уравнения (1), который представляет собой замкну-

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
**E-mail: 555svs@mail.ru*

тую выпуклую оболочку элементов носителя $S(f)$ уравнения (1), т.е. точек Q_{Im}

$$Q_{Im} = (p_{Im} - |\tilde{I}|, |I|),$$
$$|\tilde{I}| = \sum_{k=1}^{n} k i_k, \quad m \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Первые приближения являются решениями так называемых укороченных уравнений, соответствующих граням (ребрам и вершинам) указанного многоугольника (искомая функция $u = u(x)$)

$$\hat{f}_\Gamma(x,U) = 0, \quad \hat{f}_\Gamma(x,U) = \sum_{I \in N_\Gamma} a_I(x) U^I,$$
$$U = (u, u', \ldots, u^{(n)}), \quad U^I = u^{i_0}(u')^{i_1} \ldots (u^{(n)})^{i_n}, \tag{3}$$

где N_Γ – это множество наборов I, соответствующих элементам носителя $Q_{I1} = (p_{I1} - |\tilde{I}|, |I|)$, принадлежащим выбранной грани Γ. Для вычисления степенных первых приближений (степенных асимптотик) ищется решение уравнения (3) в виде $u = Ax^\alpha$, $A, \alpha = \mathrm{const}$, $A \neq 0$. В случае ребра, если дополнительно предположить, что оно является наклонным (не горизонтальным), т.е. $|I| \neq \mathrm{const}$ для всех наборов I, входящих в сумму $\hat{f}_\Gamma(x,U)$, число α определяется однозначно, а именно $a = -(1, \alpha)$, где вектор a является внешней нормалью к рассматриваемому ребру. Отметим также, что для всех точек носителя, принадлежащих данному ребру, $\beta = \alpha|I| + p_{I1} - |\tilde{I}| = \mathrm{const}$. Для вычисления параметра A в случае ребра необходимо решить алгебраическое уравнение

$$\sum_{I \in N_\Gamma} a_{I1} \mu(\alpha, I) A^{|I|} = 0,$$
$$\mu(\alpha, I) = \alpha^{i_1}(\alpha(\alpha-1))^{i_2} \ldots (\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1))^{i_n}.$$

В случае вершины числа α образуют в нашем случае множество корней некоторого многочлена, при этом вектор $-(1, \mathrm{Re}\,\alpha)$ должен принадлежать так называемому нормальному конусу рассматриваемой вершины, а параметр A является произвольным отличным от нуля числом (см. [1]).

Предположим теперь, что укороченное уравнение (3), соответствующее выбранной грани Γ, имеет нетривиальное решение $u(x) = Ax^\alpha$, $A \neq 0$. После замены $y = u(x) + z$ уравнение (1) примет вид

$$\tilde{f}_u(x,Z) = 0, \quad \tilde{f}_u(x,Z) = f(x, U + Z),$$
$$Z = (z, z', \ldots, z^{(n)}), \quad U = (u, u', \ldots, u^{(n)}). \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $\hat{f}_\Gamma(x, U + \tilde{Z})$, $\tilde{Z} = (z_0, \ldots, z_n)$, определенную в (3), как многочлен по $\tilde{Z}$ с нулевым свободным членом (см. (3)). Выделим в этом многочлене его линейную часть

$$g_{\Gamma,u}(x, \tilde{Z}) = x^\gamma \sum_{k=0}^{n} b_k x^k z_k,$$

где $\gamma = \beta - \alpha$, $b_0, \ldots, b_n$ — постоянные (зависящие от Γ и u). Отметим, что величины b_k, $k = 0, \ldots, n$, можно определить как частные производные многочлена $\hat{f}_\Gamma(x, U + \tilde{Z})$ по переменной z_k, вычисленные при $z_j = 0$, $j = 0, \ldots, n$, $x = 1$. Для представления величин b_k, $k = 0, \ldots, n$, в явном виде могут быть использованы формулы

$$b_k = \sum_{I \in N_\Gamma} a_{I1} A^{|I|-1} \mu_{Ik0} \mu_{Ik1} \ldots \mu_{Ikn}, \quad k = 0, \ldots, n,$$
$$\mu_{I00} = i_0, \quad \mu_{Ik0} = 1 \quad \text{при} \quad k \neq 0,$$

при $1 \le j \le n$, $j \neq k$ $\mu_{Ikj} = (\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1))^{i_j}$,

при $1 \le k \le n$ $\mu_{Ikk} = i_k(\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1))^{i_k-1}$,

при $i_k \neq 0$, $\mu_{Ikk} = 0$

при $i_k = 0$,

везде полагаем, что $0^0 = 1$.

Запишем уравнение (4) в виде

$$\tilde{\tilde{f}}_u(x,Z) = 0, \quad \tilde{\tilde{f}}_u(x,Z) = x^{-\gamma}\tilde{f}_u(x,Z) =$$
$$= L_{\Gamma,u}(x)z + h_{\Gamma,u}(x,Z), \tag{5}$$
$$L_{\Gamma,u}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \frac{d^k}{dx^k}.$$

Далее рассмотрим невырожденный случай, когда $|b_0| + \ldots + |b_n| \neq 0$. В этом случае носителем $S(L_{\Gamma,u}(x)z)$ является точка (0, 1), являющаяся вершиной многоугольника $N(\tilde{\tilde{f}}_u(x,Z))$, и среди точек носителя $S(h_{\Gamma,u}(x,Z))$ нет точки (0, 1).

Нашей целью было приведение исходного уравнения в невырожденном случае к виду (5), что всегда возможно. В случае, если исходное уравнение уже имеет указанный вид, первое приближение может быть не степенным, а степенно-логарифмическим (см. следующий раздел).

Условие сходимости формального решения уравнения (1), первое приближение которого описано выше, состоит в том, что порядок дифференциального оператора $L_{\Gamma,u}(x)$ равен порядку исходного уравнения, т.е. $b_n \neq 0$. Это утверждение для степенных разложений было сформулировано в [1, теорема 3.4]. Соответствующее доказательство для разложений в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами в случае, когда функции $a_I(x)$ являются конечными суммами степенных мономов, было дано в [5]. Для алгебраического ОДУ аналогичное утверждение в

несколько обобщенном виде было предложено в [6] для разложений в виде рядов Дюлака с неотрицательными целыми степенями. Смысл обобщения, представленного в [6], состоит в том, оно включает случай, когда исходная и некоторое конечное число следующих граней многоугольника Ньютона, соответствующих членам разложения, являются вырожденными (т.е. соответствующие операторы $L_{\Gamma,u}(x)$ тривиальны). При этом условие сходимости означает, что в процессе последовательного вычисления элементов формального решения алгебраического ОДУ на некотором шаге появится грань многоугольника Ньютона, для которой соответствующий линейный дифференциальный оператор $L_{\Gamma,u}(x)$ будет нетривиален и его порядок будет равен порядку уравнения. Таким образом, равенство порядков оператора $L_{\Gamma,u}(x)$ и исходного уравнения является базовым условием сходимости разложений формальных решений. В нашей работе мы покажем, что это условие является достаточным условием сходимости степенно-логарифмических разложений решений уравнения (1) (разложений в виде рядов Дюлака с комплексными степенями).

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В невырожденном случае уравнение (5) можно записать в следующем виде:

$$L_{\Gamma,u}(x)z = F(x,Z), \tag{6}$$

где

$$Z = (z, z', \ldots, z^{(n)}),$$

$$L_{\Gamma,u}(x) = b_0 + b_1 x\frac{d}{dx} + \ldots + b_n x^n \frac{d^n}{dx^n},$$

$$|b_0| + \ldots + |b_n| \neq 0,$$

$$F(x,Z) = \sum_{|I|=0}^{M} f_I(x)Z^I, \quad f_I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{Im}x^{p_{Im}},$$

$$\operatorname{Re} p_{Im} \le \operatorname{Re} p_{I(m+1)}, \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{Re} p_{Im} = +\infty,$$

$$F(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^{p_m},$$

$$\operatorname{Re} p_m \le \operatorname{Re} p_{m+1}, \quad \operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re}\alpha.$$

Отметим, что в (6) числа p_{Im} в случае ребра вещественны, а в случае вершины могут быть комплексными. Будем считать уравнение (6) неоднородным, т.е. $c_1 \neq 0$ (в обратном случае функция $y(x) = Ax^{\alpha}$ уже является решением исходного уравнения). Точки $Q_1 = (0,1)$, $Q_2 = (\operatorname{Re} p_1, 0)$ являются вершинами многоугольника Ньютона уравнения (6), при этом ребро $[Q_1, Q_2]$ принадлежит его левой границе. Носителем $S(L_{\Gamma,u}(x)z)$ является точка (0, 1), при этом в уравнении (6) среди точек носителя $S(F(x,Z))$ нет точки (0, 1) (аналогичное условие выполняется в уравнении (5)). В предыдущем разделе отмечалось, что в невырожденном случае исходное уравнение (1) всегда может быть приведено к виду (6). Все ряды в (6) равномерно и абсолютно сходятся в некоторой V-окрестности нуля.

Теорема. *Если в уравнении (6) выполняется условие $b_n \neq 0$, то данное уравнение имеет продолжаемое решение в виде ряда Дюлака*

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\ln x)x^{s_m}, \quad s_m \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s_m \le \operatorname{Re} s_{m+1},$$
$$s_1 = p_1, \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{Re} s_m = +\infty, \tag{7}$$

$g_m(\ln x)$ – многочлены от $\ln x$. Данный ряд абсолютно и равномерно сходится в некоторой V-окрестности точки $x = 0$.

Существование у уравнения (6) формального решения вида (7) установлено в [1]. В нашей теореме утверждается сходимость указанного ряда при условии, что $b_n \neq 0$. Приведем основные элементы доказательства теоремы.

С помощью преобразования

$$z = z_1 + \sum_{1\le i\le K} \tilde{g}_i(\ln x)x^{\tilde{s}_i},$$
$$\tilde{s}_i \in \mathbb{C}, \quad \tilde{g}_i(\ln x) \text{ – многочлены от } \ln x,$$

уравнение (6) преобразуется к виду, который отличается от (6) тем, что c_{Im} – не константы, а многочлены от $\ln x$ (степени которых в совокупности ограничены сверху некоторым числом), и в некоторой V-окрестности нуля выполняется оценка $\|F(x,0)\| \le D|x|^q$, где число $q > 0$ можно выбрать сколь угодно большим (под нормой $\|\nu\|$ абсолютно сходящегося ряда $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$ понимается $\sum_{i=1}^{\infty} |\nu_i|$). Считаем, что для преобразованного уравнения (6) данное условие уже выполнено и решение этого уравнения ищем в виде суммы ряда $z_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$, где функции $u_m = u_m(x)$ являются решениями следующих уравнений:

$$L_{\Gamma,u}(x)u_1 = F_1(x), \quad F_1(x) = F(x,0), \tag{8}$$

$$L_{\Gamma,u}(x)u_{m+1} = F_{m+1}(x),$$
$$F_{m+1}(x) = F(x,H_m) - F(x,H_{m-1}),$$
$$H_0 = (0,\ldots,0), \quad H_m = (h_m, h_m', \ldots, h_m^{(n)}), \tag{9}$$
$$h_m = \sum_{1\le i\le m} u_i, \; m = 1,2,\ldots$$

Функции в правых частях данных уравнений являются степенно-логарифмическими рядами, вслед-

ствие чего решения уравнений представляются в виде степенно-логарифмических разложений. Рассмотрим вопрос о сходимости этих разложений.

Поскольку ребро, соединяющее вершины $Q_1 = (0, 1)$ и $Q_2 = (\operatorname{Re} p_1, 0)$, принадлежит левой границе многоугольника Ньютона уравнения (6), то для каждого набора $I : 1 \le |I| \le M$ верно неравенство $\operatorname{Re} p_{I1} > \operatorname{Re} p_1(1-|I|) + |\tilde{I}|$. Следовательно, за счет некоторого уменьшения чисел $\operatorname{Re} p_1$ и $\operatorname{Re} p_{I1}$ можно считать, что в некоторой V-окрестности нуля W выполняются условия

$$\begin{gathered}\|F(x,0)\| \le D|x|^{\operatorname{Re} p_1}, \quad |f_I(x)| \le D|x|^{\operatorname{Re} p_{I1}}, \\ \operatorname{Re} p_1 > q, \quad x \in W, \\ \operatorname{Re} p_{I1} \ge \operatorname{Re} p_1(1-|I|) + |\tilde{I}| + \delta, \\ 1 \le |I| \le M, \quad D, \delta = \text{const} > 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L(x)v = h(x), \tag{11}$$

где $L(x) = a_0 + a_1 x \dfrac{d}{dx} + \ldots + a_l x^l \dfrac{d}{dx^l}$, $a_l \ne 0$, $h(x)$ – функция, имеющая вид степенного ряда по x, коэффициентами которого являются многочлены от $\ln x$, степени которых в совокупности ограничены некоторым числом, $\|h(x)\| \le C|x|^q$, $C, q = \text{const} > 0$, $x \in W$. Справедлива следующая

Лемма. *Существует такое число q_0, зависящее только от параметров оператора $L(x)$, что если $q > q_0$, то уравнение* (11) *имеет решение $v = v(x)$ в виде степенного ряда по x, коэффициентами которого являются многочлены от* $\ln x$ (*степени которых в совокупности ограничены некоторым числом*), *и для этого решения выполняются оценки*

$$\begin{gathered}\|v^{(j)}(x)\| \le BC|x|^{q-j}, \quad B = \text{const} > 0, \\ x \in W, \quad j = 0, 1, \ldots, l,\end{gathered} \tag{12}$$

причем величина B не зависит от q, а зависит только от параметров оператора $L(x)$.

Ниже под решениями уравнений вида (11) будем подразумевать решения указанного в лемме вида.

Замечание. Для производных $v^{(j)}(x)$ порядка $j > l$ оценки вида (12) также могут выполняться, но величина B уже будет зависеть от q, примером чему служат оператор $L(x) = 1$ и функции $v(x) = h(x) = x^q$.

Если оператор $L_{\Gamma,u}(x)$ имеет порядок, равный n (т.е. $b_n \ne 0$), то из (10) и из приведенной выше леммы следует существование такого решения $u_1(x)$ уравнения (8), для которого выполняются оценки

$$\begin{gathered}\|u_1^{(j)}(x)\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j}, \quad B_1 = \text{const} > 0, \\ x \in W, \quad j = 0, 1, \ldots, n,\end{gathered}$$

где величина B_1 не зависит от $\operatorname{Re} p_1$, а зависит только от параметров оператора $L_{\Gamma,u}(x)$.

В правую часть уравнения (9) при $m = K+1$ входят функции $u_i^{(j)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, K$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Предположим, что при некотором $r > 0$, $r^\delta \le \dfrac{1}{4}$, для этих функций имеют место оценки

$$\begin{gathered}\|u_i^{(j)}(x)\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j + (i-1)\delta_1}, \\ \delta_1 = \delta/2, \quad x \in W, \quad |x| \le r, \\ i = 1, \ldots, K, \quad j = 0, 1, \ldots, n.\end{gathered}$$

Тогда для функции $F_{K+1}(x)$ в (9) при $x \in W$, $|x| \le r$, будет выполняться оценка

$$\|F_{K+1}(x)\| \le DM\tilde{M}(4B_1D)^M |x|^{\operatorname{Re} p_1 + (K-1)\delta_1 + \delta}.$$

Здесь $\tilde{M}$ – число наборов I, для которых $1 \le |I| \le M$.

Выберем число $r > 0$ таким, чтобы выполнялись неравенства

$$\tilde{M}M(4B_1D)^M r^{\delta_1} \le 1, \quad r^{\delta_1} \le \frac{1}{2}.$$

Тогда для функции $F_{K+1}(x)$ при $x \in W$, $|x| \le r$ будет выполняться оценка

$$\|F_{K+1}(x)\| \le D|x|^{\operatorname{Re} p_1 + K\delta_1}$$

и согласно лемме уравнение (9) при $m = K+1$ имеет такое решение $u_{K+1}(x)$, что

$$\begin{gathered}\|u_{K+1}^{(j)}(x)\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j + K\delta_1}, \\ x \in W, \quad |x| \le r, \quad j = 0, 1, \ldots, n.\end{gathered}$$

Следовательно, при всех $m \ge 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$, для решений $u_m(x)$ уравнений (8) и (9) имеют место оценки

$$\|u_m^{(j)}(x)\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j + (m-1)\delta_1}, \quad x \in W, \quad |x| \le r. \tag{13}$$

Из этого следует абсолютная и равномерная сходимость в некоторой V-окрестности нуля рядов $z_1^{(j)} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, что завершает доказательство теоремы.

Таким образом, если многоугольник Ньютона уравнения (1) имеет невырожденную грань и соответствующее ей укороченное уравнение (3) имеет нетривиальное решение $u = Ax^\alpha$, то при условии теоремы уравнение (1) имеет продолжаемое решение, обладающее указанной степенной

асимптотикой и сходящимся степенно-логарифмическим разложением.

Отметим, что если в (6) порядок l нетривиального оператора $L_{\Gamma,u}(x)$ меньше n (т.е. $b_n = 0$), то в правые части уравнений (9) входят производные функций $u_i(x)$, $1 \le i \le m$ порядка большего, чем l. Согласно замечанию к лемме, в оценках вида (12) для этих производных величина B, вообще говоря, зависит от q и растет вместе с ростом числа q. Это обстоятельство приводит в общем случае к нарушению оценок (13) и к расходимости ряда $z_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$. Иллюстрацией здесь может служить уравнение, рассмотренное в [7] Эйлером:

$$y = x + x^2 y'. \tag{14}$$

Данное уравнение имеет вид (6), оператор $L_{\Gamma,u}(x) = 1$, т.е. $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ и условие теоремы не выполняется. Функции $u_m(x)$ (см. (8), (9)) имеют вид: $u_1 = x$, $u_m = (m-1)!x^m$, $m \ge 2$. Уравнение (11) здесь имеет вид $u_m(x) = (m-1)!x^m$, при этом $u'_m(x) = m!x^{m-1}$. Множитель, аналогичный величине B в (12), здесь равен m и, следовательно, оценка (12) не выполняется при $j = 1$ (т.е. не распространяется на функции $u'_m(x)$, $m \ge 2$). В результате ряд $y = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$, являющийся формальным решением уравнения (14), расходится.

3. ПРИМЕР УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Рассмотрим уравнение Абеля первого рода в нормальной форме:

$$y' + y^3 + cx^p = 0. \tag{15}$$

Носитель левой части уравнения состоит из трех точек $Q = (-1, 1)$, $Q_1 = (p, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$. При $p > -3/2$ их выпуклая оболочка (многоугольник Ньютона) – это треугольник Γ с вершинами Q, Q_1, Q_2 и ребрами $\Gamma_1 = [Q, Q_1]$, $\Gamma_2 = [Q, Q_2]$, $\Gamma_3 = [Q_1, Q_2]$. Левая граница треугольника состоит из указанных трех вершин и двух ребер Γ_1, Γ_2.

Рассмотрим ребро Γ_1. Записывая уравнение (15) в виде

$$L(x)y = F(x, y), \quad L(x) = x\frac{d}{dx},$$
$$F(x, y) = -xy^3 - cx^{p+1},$$

получаем уравнение вида (6), для которого выполнены условия теоремы ($b_1 = 1$). Интегрирование соответствующих уравнений (8) и (9) позволяет получить решение уравнения (15) в виде степенно-логарифмического ряда. Согласно нашей теореме этот ряд будет абсолютно и равномерно сходящимся в некоторой V-окрестности точки $x = 0$. Не ставя целью вычисление явного вида этого ряда, отметим лишь, что при $p > -1$ указанный ряд будет степенным, при $p = -1$ – степенно-логарифмическим, а при $-3/2 < p < -1$ данный ряд (в зависимости от параметра p) может быть как степенным, так и степенно-логарифмическим.

Рассмотрим ребро Γ_2 при $p > -3/2$. Функции $v = v_{1,2}(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2x}}$ являются решениями укороченного уравнения $v' + v^3 = 0$, соответствующего данному ребру. После замены $y = v_{1,2}(x) + z$ уравнение (15) можем записать в виде (6)

$$L_{\Gamma_2,v}(x)z = F(x, z), \quad L_{\Gamma_2,v}(x) = x\frac{d}{dx} + \frac{3}{2},$$
$$F(x, z) = -3v_{1,2}(x)xz^2 - xz^3 - cx^{p+1}.$$

Условия теоремы здесь выполнены ($b_1 = 1$) и, следовательно, для каждой из функций $v_{1,2}(x)$ данное уравнение имеет решения в виде абсолютно и равномерно сходящихся в некоторой V-окрестности точки $x = 0$ рядов $z_{1,2}(x)$ вида (7). Интегрирование соответствующих уравнений (8) и (9) с учетом неравенства $p > -5/2$ показывает, что указанные ряды $z_{1,2}(x)$ будут степенными. Соответственно, уравнение (15) будет иметь решения $y_{1,2}(x) = v_{1,2}(x) + z_{1,2}(x)$ в виде степенных рядов, абсолютно и равномерно сходящихся в некоторой V-окрестности точки $x = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. № 3 (357). С. 31–80.
2. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности его неособой точки // ДАН. 2012. Т. 442. С. 583–588.
3. *Самовол В.С.* О разложениях решений уравнения Риккати в сходящиеся ряды // Математические заметки. 2019. Т. 105. Вып. 4. С. 603–615.
4. *Самовол В.С.* Об асимптотических разложениях решений уравнения Риккати // ДАН. 2020. Т. 490. С. 59–62.
5. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Сходимость степенных разложений решений ОДУ. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 94. 2013. 16 с.
6. *Гонцов Р.Р., Горючкина И.В.* О сходимости формальных рядов Дюлака, удовлетворяющих алгебраическому ОДУ // Математический сборник. 2019. Т. 210. № 9. С. 3–18.
7. *Euler L.* De seriebus divergentibus // Opera omnia, 1754. ser. I. V. 14. № 247. P. 585–617.

ON CONVERGENT-SERIES EXPANSIONS FOR SOLUTIONS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. S. Samovol[a]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We consider a large class of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order with coefficients in the form of power series that converge in a neighbourhood of the origin. There are known power-geometry methods and algorithms based on them for the computation of power-logarithmic series (Dulac series) that formally satisfy such equations. We prove a sufficient condition for the convergence of such formal solutions.

Keywords: Newton polygon, continuable solution, formal solution, Dulac series, convergence