ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 76–82

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОБОБЩЕННЫМ ЯДРОМ КОШИ

© 2022 г. А. П. Солдатов[1,2,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 27.02.2021 г.
Поступило 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принято к публикации 04.02.2022 г.

Рассматриваются сингулярные интегральные операторы на кусочно-гладкой кривой в весовых лебеговых пространствах с кусочно-непрерывными матричными коэффициентами. В отличие от классического случая сингулярные интегралы определяются обобщенными ядрами Коши, возникающими как параметрикс эллиптических систем первого порядка на плоскости. Получен критерий фредгольмовости этих операторов и дана формула их индекса.

Ключевые слова: сингулярные интегральные операторы, кусочно-ляпуновская кривая, обобщенные ядра Коши, фредгольмовость, формула индекса, весовые лебеговые пространства, эллиптические системы первого порядка

DOI: 10.31857/S2686954322020163

В весовом L^p-пространстве l-вектор-функций φ, заданных на кусочно-гладкой ориентируемой кривой Γ, рассмотрим сингулярный интегральный оператор Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Вместе с операторами умножения на кусочно-непрерывные $(l \times l)$-матрицы-функции a, b он определяет классический сингулярный оператор вида

$$2N = a(1+K) + b(1-K), \tag{1}$$

где 1 означает единичный оператор. Теории фредгольмовой разрешимости этих операторов посвящена обширная литература. В скалярном случае $l = 1$ итог этой теории подведен в известных монографиях Н.И. Мусхелишвили [1], Ф.Д. Гахова [2] (в весовых гельдеровых пространствах) и Б.В. Хведелидзе [3], И.И. Данилюка [4] (в весовых лебеговых пространствах).

В векторном случае $l > 1$ для произвольной кусочно-гладкой кривой развитые методы встречали определенные затруднения, связанные с некомпактностью интегральных операторов вида $aK - Ka$ и $K^2 - 1$, которые определяются ядрами, приближенно однородных степени -1 относительно расстояний до узлов кривой.

Теория фредгольмовой разрешимости операторов минимальной алгебры, порожденной операторами a и K, построена в монографии И.Ц. Гохберга и Н.И. Крупника [5]. В основе лежал локальный принцип, разработанный И.Б. Симоненко [6]. Другой подход, основанный на привлечении интегральных операторов с ядрами, приближенно однородных степени -1 относительно расстояний до узлов кривой, был предложен в работах Р.В. Дудучава [7] и автора [8]. Современное состояние теории изложено в монографии С.Г. Михлина и С. Пресдорфа [9].

Пусть $(l \times l)$-матрица-функция $J(t)$ непрерывна по Гёльдеру на кривой Γ, причем ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\nu > 0$ в каждой точке кривой. Удобно с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу $z_{J(t)} = x1 + yJ(t)$, где 1 означает единичную $(l \times l)$-матрицу. Аналогичный смысл имеет обозначение $dz_{J(t)} = dx1 + J(t)dy$ по отношению к комплексному дифференциалу $dz = dx + idy$. Заметим, что при $z \neq 0$ матрица $z_{J(t)}$ обратима и обратная матрица $z_{J(t)}^{-1}$ однородна степени -1 по переменной z.

[1] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Национальный исследовательский университет МЭИ, Академии наук Республики Саха, Якутия, Россия*
**E-mail: soldatov48@gmail.com*

В этих обозначениях сингулярный оператор с обобщенным ядром Коши определяется формулой

$$\left[K_{(J)}\varphi\right](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}(t-t_0)^{-1}_{J(t)}dt_{J(t)}\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (2)$$

где $(l \times l)$-матричное выражение поставлено впереди l-вектора и действует на него по обычному правилу.

Ядро этого типа возникает в связи с тем, что матрица-функция $X(z,t) = z^{-1}_{J(t)}$ по переменной $z = x + iy$ служит параметриксом для эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - J(z)\frac{\partial U}{\partial x} = F(z), \quad z \in D.$$

Соответственно аналогичные (2) обобщенные интегралы типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}(t-z)^{-1}_{J(t)}dt_{J(t)}\varphi(t), \quad z \notin \Gamma, \quad (3)$$

можно использовать для исследования краевых задач для этих систем [10]. Вопросы ограниченности оператора $K_{(J)}$ в весовых пространствах и соответствующие граничные свойства интегралов типа Коши (3) подробно были изучены в [11].

Основная цель данного сообщения – получить критерий фредгольмовости и формулу индекса для аналогичных (1) сингулярных операторов

$$2N = a\left(1 + K_{(J)}\right) + b\left(1 - K_{(J)}\right), \quad (4)$$

определяемых обобщенным оператором Коши $K_{(J)}$.

Предварительно остановимся на обозначениях, связанных с кусочно-гладкой кривой. По определению под ней понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. В круге $|z-\tau| \le \varrho$ с центром в точке $\tau \in \Gamma$ достаточно малого радиуса ϱ кривая Γ распадается на конечное число гладких дуг $G_{\tau,j}$, $1 \le j \le m_\tau$, с общим концом в точке τ. Число ϱ можно выбрать столь малым, что каждая из дуг радиальна в том смысле, что при $0 < r \le \varrho$ окружность $|z-\tau| = r$ пересекает ее (и при том некасательно) в единственной точке. Выбирая r в качестве параметра, в результате получаем гладкую параметризацию дуги $G_{\tau,j}$ вида

$$\gamma_{\tau,j}(r) - \tau = re^{i\theta_{\tau,j}(r)}, \quad 0 < r \le \varrho, \quad (5)$$

где вещественная функция $\theta(r)$ непрерывно дифференцируема на полуоткрытом интервале $(0,\varrho]$ и $\theta(r) \to \theta(0)$, $r\theta'(r) \to 0$ при $r \to 0$. В частности, $|\gamma'(0)| = 1$ и число $\theta(0)$ есть аргумент $\arg\gamma'(0)$ единичного касательного вектора $\gamma'(0)$. Эту параметризацию также называем радиальной.

Радиальные дуги $G_{\tau,j}$ называем концевыми, они разбивают круг $\{|z-\tau| \le \varrho\}$ на n_τ криволинейных секторов $S_{\tau,j}$, $1 \le j \le m_\tau$. Если раствор одного из них равен нулю (т.е. его боковые стороны касаются в точке τ), то τ называем точкой возврата кривой Γ. При $m_\tau = 1$ криволинейный сектор S_τ представляет собой круг с разрезом (вдоль концевой дуги), его раствор, очевидно, равен 2π. Если $m_\tau = 2$ и растворы обоих секторов $S_{\tau,1}$ и $S_{\tau,2}$ равны π, то обе концевые дуги составляют гладкую дугу. Точки τ с этим свойством называем внутренними точками кривой Γ. Точки кривой, не являющиеся внутренними, называются угловыми, их число, очевидно, конечно.

Пусть конечное множество F содержит все угловые точки кривой Γ. Тогда кривая $\Gamma\backslash F$ является гладкой и каждая ее связная компонента гомеоморфна либо открытому интервалу прямой, либо окружности. Эти связные компоненты, дополненные концами в случае дуг, обозначим Γ_j, $1 \le j \le n$. При каждом j кривая Γ_j является либо гладкой дугой (разомкнутой или сомкнутой), либо простым гладким контуром. Для определенности первые m компонент считаем дугами, так что $\sum_\tau m_\tau = 2m$. Каждая кривая Γ_j определенным образом ориентирована, по отношению к которой и понимается криволинейный интеграл (2). Число ϱ в (5) выберем единым для всех точек $\tau \in F$, предполагая, что круги $|z-\tau| \le \varrho$ попарно не пересекаются. Тогда все концевые дуги $G_{\tau,j}$, $1 \le j \le m_\tau$, $\tau \in F$, могут попарно пересекаться только в точках $\tau \in F$. Объединение G_F всех концевых дуг является окрестностью множества F на кривой. С каждым узлом τ можно связать сигнатуру ориентации $\varepsilon_{\tau,j}$, принимающую значение 1, если дуга $G_{\tau,j}$ выходит из точки τ и значение -1, если эта дуга входит в τ.

Введем класс $C(\Gamma, F)$ кусочно-непрерывных $(l \times l)$-матриц-функций, непрерывных вне F и допускающих односторонние пределы в точках $\tau \in F$. Более точно, его элементы $a(t)$ на каждой концевой дуге $G_{\tau,j}$ имеют предел в точке τ, который обозначим $a_{\tau,j}$. Если матрица-функция a обратима, т.е. $\det a(t) \ne 0$ всюду на $\Gamma\backslash F$, включая ее односторонние предельные значения, то можно ввести комплексное число

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma,F}a = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}[\ln\det a]_{\Gamma_j},$$

где квадратные скобки означают приращения непрерывных ветвей логарифма на компонентах Γ_j, взятые в соответствии с их ориентацией. Это число называем индексом Коши матрицы-функции a. В случае $F = \emptyset$ кривая Γ является (составным) гладким контуром и это число целое. В общем случае

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma,F} a = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\tau,j} \varepsilon_{\tau,j} \ln\det a_{\tau,j} + \text{целое число}. \tag{6}$$

Условимся под весовым порядком понимать семейство $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел. Соответственно функцию вида

$$\rho_\lambda(t) = \prod_{\tau\in F} |t-\tau|^{\lambda_\tau}, \quad t \in \Gamma, \tag{7}$$

называем весовой функцией порядка λ. Весовые порядки, которые на всех точках $\tau \in F$ принимают одно и то же значение, отождествляются с вещественными числами.

По определению весовое пространство $L_0^p(\Gamma, F)$ состоит из измеримых комплекснозначных функций $\varphi(t)$ на кривой Γ, для которых $\rho_{-1/p}\varphi \in L^p(\Gamma)$. Относительно соответствующей нормы

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma \left|\rho_\lambda^{-1}(t)\varphi(t)\right|^p \frac{d_1 t}{\rho_1(t)}\right)^{1/p}$$

это пространство банахово. Здесь $d_1 t$ означает элемент длины дуги и, как обычно, две функции, отличающиеся друг от друга на множестве нулевой меры, отождествляются. Таким образом, $L_0^p(\Gamma, F)$ можно трактовать как L^p-пространство относительно меры $\rho_{-1}d_1 t$, а $L_\lambda^p(\Gamma, F)$ состоит из всех функций $\varphi = \rho_\lambda\varphi_0$, $\varphi_0 \in L_0^p$ с перенесенной нормой. Конечно, при $F = \emptyset$ имеем обычное пространство $L^p(\Gamma)$. Это пространство возникает и когда все $\lambda_\tau = -1/p$. Очевидно, семейство банаховых пространств (L_λ^p) монотонно убывает (в смысле вложения) по всем параметрам λ_τ и p.

Принятое определение весовых пространств отличается от более распространенного определения весового пространства $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ (см., например, [3, 9]), которое задается нормой

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho_\alpha(t) d_1 t\right)^{1/p}.$$

Очевидно, при $p\lambda = -\alpha - 1$ оно совпадает с L_λ^p. Одно из достоинств принятого определения весовых пространств состоит в том, что при $-1 < \lambda < 0$ пространство $L_\lambda^p(\Gamma, F)$ содержится в классе $L^1(\Gamma)$ суммируемых функций. Аналогичный факт по отношению к $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ определяется условием $-1 < \alpha < p-1$, которое зависит от p. Как показано в [11], обобщенный сингулярный оператор Коши $K_{(J)}$, а вместе с ним и оператор (4) при $-1 < \lambda < 0$ ограничены в пространстве $L_\lambda^p(\Gamma, F)$.

В дальнейшем широко будем пользоваться понятием функции от матриц [12], которое используется для степенной функции

$$f(w) = w^\zeta, \quad 0 < \arg w < 2\pi, \tag{8}$$

с комплексным показателем ζ. Если спектр $\sigma(A)$ матрицы A не лежит на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, то определено значение $f(A) = A^\zeta$ от этой матрицы. В конкретных ситуациях обычно матрицу A приводят к блочно-диагональному виду: $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_n)$, где A_j имеет единственное собственное значение ν_j. Тогда аналогичный вид имеет и матрица $f(A)$, т.е. $T^{-1}f(A)T = \operatorname{diag}[f(A_1), \ldots, f(A_n)]$. Применительно к функции (8) матрица $f(A_j) = \nu_j^\zeta p_j(\zeta)$ с матричным многочленом

$$p_j(\zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-k+1)}{k!}(A_j - \nu_j)^k,$$

где учтено, что матрица $A_j - \nu_j$ нильпотентна и, следовательно, $(A_j - \nu_j)^k = 0$ при $k \ge l$. Определитель этого многочлена тождественно равен единице.

В обозначениях (5) удобно положить

$$q_{\tau,j} = e^{i\theta_{\tau,j}(0)}, \quad Q_{\tau,j} = (q_{\tau,j})_{J(\tau)}. \tag{9}$$

При $m_\tau \ge 3$ нумерацию дуг $G_{\tau,j}$ и, соответственно, векторов $q_{\tau,j}$ выберем так, чтобы при возрастании j единичные вектора $q_{\tau,j}$ обходили начало координат против часовой стрелки, так что их аргументы $\theta_{\tau,j}(0)$ можно подчинить условию $\arg q_{\tau,1} < \ldots < \arg q_{\tau,m_\tau} < 2\pi + \arg q_{\tau,1}$.

Важно заметить, что при $1 \le k$, $j \le m_\tau$, $k \ne j$, собственные значения матрицы $Q_{\tau,k}Q_{\tau,j}^{-1}$ не лежат на вещественной полуоси. В самом деле, для любого $\nu > 0$ вектор $q_{\tau,k} - \nu q_{\tau,j} \ne 0$, так что матрица $(q_{\tau,k} - \nu q_{\tau,j})_{J(\tau)} = Q_{\tau,k} - \nu Q_{\tau,j}$ обратима, а вместе с ней обратима и матрица $Q_{\tau,k}Q_{\tau,j}^{-1} - \nu$.

В терминах циклической перестановки

$$[k-1] = \begin{cases} k-1, & 2 \le k \le m_\tau, \\ m_\tau, & k = 1, \end{cases}$$

векторы $q_{\tau,k}$ и $q_{\tau,[k-1]}$ являются соседними и поворот по часовой стрелке от $q_{\tau,k}$ к $q_{\tau,[k-1]}$ осуществляется на угол $\arg(q_{\tau,k}q_{\tau,[k-1]}^{-1})$, заключенный между 0 и 2π. В частности, сумма всех этих углов равна 2π.

Пусть для краткости

$$P_{\tau,k}(\zeta) = (Q_{\tau,k}Q_{\tau,[k-1]}^{-1})^{\zeta},$$

где степенная функция определяется (8).

Л е м м а 1. *Для заданных* $x_1, \ldots, x_{m_\tau} \in \mathbb{C}^{l\times l}$ *матрица-функция*

$$x(\zeta) = e^{2\pi i\zeta}P_{\tau,1}^{-1}(\zeta)x_1P_{\tau,2}^{-1}(\zeta)x_2 \cdots P_{\tau,n_\tau}^{-1}(\zeta)x_{m_\tau} \qquad (10)$$

является многочленом и ее определитель равен произведению определителей матриц x_k, $1 \le k \le m_\tau$.

Сформулируем теперь основной результат о фредгольмовости операторов вида (4).

Т е о р е м а 1. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая* Γ *не содержит точек возврата, матрица-функция* $J(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера на* Γ *и все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости.*

В этих предположениях оператор N *в* (4) *фредгольмов в пространстве* $L_\lambda^p(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, *тогда и только тогда, когда матрицы-функции* a, b *обратимы в* $C(\Gamma, F)$ *и*

$$\det[e^{2\pi i\zeta} - c_\tau(\zeta)] \ne 0; \quad \mathrm{Re}\zeta = \lambda_\tau, \quad \tau \in F,$$

где c_τ *определяется формулой* (10) *по отношению к* $x_k = (a^{-1}b)_{\tau,k}^{-\varepsilon_{\tau,k}}$.

При выполнении этих условий индекс этого оператора дается равенством

$$\mathrm{ind}N = \mathrm{Ind}_{\Gamma,F}(a^{-1}b) - \sum_{\tau\in F}\delta_\tau, \qquad (11)$$

где положено

$$\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\det\left(\frac{e^{2\pi i\zeta} - c_\tau(\zeta)}{e^{2\pi i\zeta} - 1}\right)\right]_{\lambda_\tau - i\infty}^{\lambda_\tau + \infty}.$$

Заметим, что существование конечных пределов выражения в квадратных скобках при $\mathrm{Im}\zeta \to \pm\infty$ на прямой $\mathrm{Re}\zeta = \lambda_\tau$ вытекает из леммы 1. Тот факт, что правая часть равенства (11) дает целое число, является следствием (6) и леммы 1.

Аналогичный результат справедлив и для оператора $2N^1 = (1 + K_{(J)})a + (1 - K_{(J)})b$ с заменой c_τ на матрицу c_τ^1, которая определяется формулой (10) по $x_k = (ba^{-1})_{\tau,k}$.

Теорема 1 в предположении, что матрица $J(t)$ постоянна и имеет единственное собственное значение i, установлена в [8]. В классическом случае $J(t) = i$ матрица-функция c_τ постоянна и совпадает с

$$c_\tau^0 = \prod_1^{m_\tau}(a^{-1}b)_{\tau,k}^{-\varepsilon_{\tau,k}}. \qquad (12)$$

В этом случае теорему 1 можно уточнить.

Т е о р е м а 2. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая* Γ *не содержит точек возврата.*

Тогда фредгольмовость оператора $2N = a(1 + K) + b(1 - K)$ *равносильно тому, что матрицы-функции* a, b *обратимы в* $C(\Gamma, F)$ *и при каждом* τ *собственные значения матрицы* c_τ^0 *в* (12) *не лежат на луче* $\arg z = 2\pi\lambda_\tau$. *При этом имеет место формула* (11) *с*

$$\delta_\tau = \sum_\nu \frac{\ln\nu}{2\pi i}, \qquad (13)$$

где сумма берется по всем собственным значениям ν *матрицы* c_τ *с учетом их кратности, причем значение* $\ln\nu$ *выбрано по условию* $2\pi\lambda_\tau < \arg\nu < 2\pi + 2\pi\lambda_\tau$.

Равенству (13) можно придать также следующую форму. Положим

$$\xi_\tau(t) = \frac{\sin[\pi t(1 + 2\lambda_\tau)]}{\sin[\pi(1 + 2\lambda_\tau)]}, \quad 0 \le t \le 1, \quad \lambda_\tau \ne -\frac{1}{2},$$

и $\xi_\tau(t) = t$ при $\lambda_\tau = -1/2$.

Л е м м а 2. *Собственные значения матрицы* c_τ *не лежат на луче* $\arg z = 2\pi\lambda_\tau$ *тогда и только тогда, когда*

$$\det[1 - \xi_\tau(t) + \xi_\tau(t)c_\tau] \ne 0, \quad 0 \le t \le 1.$$

При этом

$$\delta_\tau = \left[\frac{1}{2\pi i}\ln\det[1 - \xi_\tau(t) + \xi_\tau(t)c_\tau]\right]_{t=0}^{1}.$$

В этой формулировке теорема 2 установлена И.Ц. Гохбергом и Н.И. Крупником [5].

До сих пор кривая Γ была конечной, т.е. лежала внутри некоторого круга. Пусть она бесконечна и точка $z_0 \notin \Gamma$. По определению эта кривая кусочно-ляпуновская, если аналогичным свойством обладает ее образ при дробно линейном отображении $z \to 1/(z - z_0)$. Во внешности круга $|z| \ge 1/\rho$, где $\rho > 0$ достаточно мало, кривая Γ распадается на конечное число полубесконечных дуг $G_{\infty,j}$, $1 \le j \le n_\infty$, с общим концом в бесконечно удаленной точке ∞. Эти дуги также можно считать радиальными, т.е. каждая окружность $|z| = r$ при $r \ge 1/\rho$ пересекает ее (и при том некасательно) в единственной точке. Тогда аналогично (5) эти дуги описываются параметризациями

$$\gamma_{\infty,j}(r) = re^{i\theta_{\infty,j}(r)}, \quad r \ge 1/\rho, \qquad (14)$$

где вещественная функция $\theta(r)$ непрерывно дифференцируема при $r \geq 1/\rho$ и $\theta(r) \to \theta(\infty)$, $r\theta'(r) \to 0$ при $r \to \infty$. В этом легко убедиться, если заметить, что при инверсии $z \to 1/\bar{z}$ уравнение вида (5) с $\tau = 0$ переходит в уравнение (14) с указанными свойствами функции $\theta(r)$.

Таким образом, существует предел $\gamma'_{\infty,j}(\infty) = \lim\gamma'_{\infty,j}(r)$ при $r \to \infty$, аналогично (9) представляющий собой единичный вектор $q_{\infty,j}$, и его аргумент равен $\theta_{\infty,j}(\infty)$. Как и выше в случае $q_{\infty,j} = q_{\infty,k}$ при $k \neq j$ говорим, что кривая Γ имеет ∞ своей точкой возврата. Нумерацию дуг $G_{\infty,j}$ и векторов $q_{\infty,j}$ по-прежнему выбираем в порядке обхода точки $z = 0$ против часовой стрелки.

Заметим попутно, что радиальная дуга $G_{\tau,j}$ с уравнением (5) является ляпуновской тогда и только тогда, когда обе функции $\theta(r)$ и $r\theta'(r)$ удовлетворяют условию Гёльдера на отрезке $[0, \rho]$. Соответственно полубесконечная радиальная дуга с уравнением (14) является ляпуновской, если указанное требование выполняется по отношению к функции $\theta(1/r)$, $0 \leq r \leq \rho$.

Для бесконечной кривой конечное множество F выбирается аналогично предыдущему, причем в его состав включается и бесконечно удаленная точка ∞. Например, вещественная и мнимая оси образуют кусочно-гладкую кривую с $F = \{0, \infty\}$ и $m = n = 4$, причем роль полубесконечных дуг Γ_j с общими концами в точках 0 и ∞ играют полуоси. Точно также две параллельные прямые составляют кусочно-гладкую кривую с $F = \{\infty\}$ и $m = n = 2$, имеющих бесконечно удаленную точку своей точкой возврата. При этом двумя бесконечными "сомкнутыми" дугами Γ_j с общим концом ∞ служат сами прямые.

Для бесконечной кривой определение (7) весовой функции порядка λ необходимо видоизменить, полагая

$$\rho_\lambda(t) = (1 + |t|)^{\lambda_\infty} \prod_{\tau\in F,\, \tau\neq\infty} \left(\frac{|t-\tau|}{1+|t|}\right)^{\lambda_\tau}, \quad t \in \Gamma. \qquad (15)$$

По отношению к ней весовое пространство $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ определяется совершенно аналогично предыдущему. Как и в случае конечной кривой оно рассматривается только при $p > 1$. Полученное семейство банаховых пространств по-прежнему монотонно убывает по вложению относительно параметров p и λ_τ, $\tau \neq \infty$, и монотонно возрастает по λ_∞. Как и выше, при $-1 < \lambda < 0$ функции $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$ суммируемы.

Пусть точка $z_0 \notin \Gamma$ и функция J^1 на конечной кривой $\Gamma^1 = \{(t - z_0)^{-1}, t \in \Gamma\}$ определяется равенством $J^1[(t - z_0)^{-1}] = J(t)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая Γ бесконечна и не содержит точек возврата, матрица-функция J^1 удовлетворяет условию Гёльдера на Γ^1 и все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости.*

Тогда все утверждения теоремы 1 *сохраняют свою силу с той разницей, что при $\tau = \infty$ матрица c_τ определяется формулой* (10) *по отношению к $x_k = (a^{-1}b)^{\varepsilon_{\tau,k}}_{\tau,k}$ и в формуле* (11) *слагаемое δ_∞ необходимо заменить на $-\delta_\infty$.*

По отношению к классическому сингулярному оператору Коши K теорема 3 по существу не дает ничего нового, так как теорема 2 инвариантна относительно дробно-линейного преобразования, переводящего бесконечную кривую Γ на конечную кривую Γ^1.

Более точно, пусть для определенности $z_0 = 0$, так что $\Gamma^1 = \{t^{-1}, t \in \Gamma\}$. Аналогичный смысл имеют множество F^1 и концевые дуги $\Gamma^1_{\tau,j}$. Ориентация кривой Γ^1 наследуется ориентацией Γ при отображении $t \to 1/t$, так что сигнатуры ε и ε^1 совпадают, т.е. $\varepsilon^1_\tau = \varepsilon_{1/\tau}$, $\tau \in F^1$. Бесконечные концевые дуги $G_{\infty,j}$ переходят в дуги $\Gamma^1_{0,j}$ с концом $\tau = 0$. Соответственно, единичным касательным вектором в точке $\tau = 0$ служит $q^1_{0,j} = e^{-i\theta_{\infty,j}}$. В частности, если при возрастании j векторы $q_{\infty,j}$ обходят единичную окружность против часовой стрелки, то векторы $q^1_{0,j}$ обходят ее по часовой стрелке.

Очевидно, весовая подстановка

$$\varphi \to \varphi^1(t) = t^{-1}\varphi(t^{-1}) \qquad (16)$$

осуществляет изоморфизм $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ на банахово пространство $L^p_{\lambda^1}(\Gamma^1, F^1)$ с весовым порядком $\lambda^1 = (\lambda^1_\tau, \tau \in F^1)$, который связан с λ соотношением $\lambda^1_\tau = \lambda_{1/\tau}$ для $\tau \neq 0$ и $\lambda^1_0 = -\lambda_\infty - 1$. При этом условие $-1 < \lambda < 0$ сохраняется и для весового порядка λ^1.

Нетрудно видеть, что при этой подстановке $(K\varphi)^1 = K^1\varphi^1$, где K^1 означает сингулярный оператор Коши K по кривой Γ^1, так что оператор $2N = a(1 + K) + b(1 - K)$ перейдет в аналогичный оператор $2N^1 = a^1(1 + K^1) + b^1(1 - K^1)$ с коэффициентами $a^1(t) = a(1/t)$ и $b^1(t) = b^1(1/t)$. В частности, операторы N и N^1 фредгольмово эквивалентны и их индексы совпадают. В этом можно убедиться и непосредственно, применяя теорему 2 к каждому из этих операторов.

Все предыдущие результаты сохраняют свою силу и в пространствах Гёльдера с весом. Обозначим $C_0^\mu(\Gamma, F)$ пространство всех непрерывных и ограниченных на $\Gamma \backslash F$ вектор-функций φ с конечной нормой

$$|\varphi| = \sup_{t\in\Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(\rho_\mu \varphi)(t_1) - (\rho_\mu \varphi)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu},$$

где весовая функция ρ_μ порядка μ определяется (7) или (15) в зависимости от типа кривой Γ. Относительно данной нормы это пространство банахово и монотонно убывает относительно μ. Исходя из него, весовое пространство $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ вводится аналогично L^p-случаю. Полученное семейство пространств монотонно убывает по параметрам μ и λ_τ, $\tau \neq \infty$, и монотонно возрастает по λ_∞ (в случае бесконечной кривой). Аналогичное банахово пространство $C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$ дифференцируемых на $\Gamma \backslash F$ функций определяется условиями $\varphi \in C_\lambda^\mu$, $\varphi' \in C_{\lambda-1}^\mu$, где штрих означает производную по параметру длины дуги. Свойства всех этих пространств подробно описаны в [11].

Обозначим далее $\mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$ класс кусочно-непрерывных $l \times l$-матриц-функций $a \in C(\Gamma, F)$, принадлежащих $C_0^\nu(\Gamma, F)$ и удовлетворяющих условию $a(t) - a_{\tau,j} \in C_{\pm\varepsilon}^\nu(G_{\tau,j}, \tau), 1 \le j \le m_\tau, \tau \in F$, с некоторым $\varepsilon > 0$, где выбирается верхний знак для конечных точек τ и нижний знак для $\tau = \infty$. Аналогичный смысл имеет класс $\mathscr{C}^{1,\nu}(\Gamma, F)$ при замене символа C^ν на $C^{1,\nu}$.

Заметим, что на кусочно-гладкой кривой Γ единичный касательный вектор $e(t)$, $t \in \Gamma \backslash F$, направление которого согласовано с ориентацией кривой, как комплекснозначная функция кусочно-непрерывна на Γ. Рассмотрим класс кусочно-ляпуновских кривых, описываемых условием $e(t) \in \mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$. Заметим, что этот класс инвариантен относительно дробно-линейных преобразований плоскости.

Т е о р е м а 4. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая Γ не содержит точек возврата и $e(t) \in \mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$, матрица-функция J принадлежит классу $\mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$, непрерывна в точках $\tau \in F$ и все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости. Пусть коэффициенты a, b в* (1), (4) *принадлежат классу $\mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$.*

Тогда теоремы 1–3 *сохраняют свою силу и по отношению к пространству $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, $0 < \mu < \nu$. При этом в предположении фредгольмовости любое решение $\varphi \in L_\lambda^p(\Gamma, F)$ уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ также принадлежит $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$. Если дополнительно функции a, b, $J \in \mathscr{C}^{1,\nu}(\Gamma, F)$ и $f \in C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$, то и $\varphi \in C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$.*

Заметим, что как и в L^p-случае аналог теоремы 2 (в терминах леммы 2) для пространств $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ также хорошо известен [9]. В случае, когда матрица-функция $J(t)$ постоянна и имеет единственное собственное значение i, а кривая Γ конечна, теорема 4 установлена в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.
3. *Хведелидзе Б.В.* Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР, 1956. Т. 23. С. 3–158.
4. *Данилюк И.И.* Нерегулярные краевые задачи. М.: Наука, 1975.
5. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.И.* Введение в теорию одномерных сингулярных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1973.
6. *Симоненко И.Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // I, Изв. АН СССР (Сер. матем.)1965. Т. 29. № 3. С. 567–586, II. Изв. АН СССР (Сер. матем.). 1965. Т. 29. № 4. С. 757–782.
7. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрССР. 1979. Т. 60. С. 1–135.
8. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991. 266 с.
9. *Mikhllin S.G., Prossdorf S.* Singular integral operators. Berlin: Akademie-Verlag and Springer-Verlag, 1986.
10. *Отелбаев М., Солдатов А.П.* Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметриксе эллиптических систем первого порядка // ЖВМиМФ. 2021. Т. 61. № 1. С. 90–99.
11. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Изд. 4-е. М.: Наука, 1988.

SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH GENERALIZED CAUCHY KERNAL

A. P. Soldatov[a]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, NIU MPEI, Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

Singular integral operators with generalized Cauchy kernels are considered on a piece-wise smooth curve. The Fredholm criterium and index formula for these operators are received in the weighted Lebegues spaces.

Keywords: Singular integral operators, generalized Cauchy kernels, weighted Lebegues spaces, Fredholm criterium, index formula