ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 83–86

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

© 2022 г. О. В. Солонуха[1,2,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 12.11.2021 г.
Поступило 17.11.2021 г.
После доработки 17.11.2021 г.
Принято к публикации 03.02.2022 г.

В ограниченной области рассматривается параболическое уравнение с квазилинейным оператором и нелокальными граничными условиями типа Бицадзе–Самарского. Доказана теорема существования и единственности периодического решения такой задачи.

Ключевые слова: периодическое решение, нелокальные краевые условия типа Бицадзе–Самарского, параболическое уравнение, максимально монотонный оператор, обобщенные решения

DOI: 10.31857/S2686954322020175

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные краевые задачи рассматриваются с 30-х годов XX века, см. работы Т. Карлемана [1]. В 50-е годы XX-го века началось рассмотрение абстрактных нелокальных задач, см. работы М.И. Вишика [2], Ф. Браудера [3] и др. Среди нелокальных параболических задач на ограниченном множестве наиболее изучены задачи с временными нелокальностями, задачи с интегральными нелокальными членами и задачи на прямоугольнике. В данной работе рассматриваются параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского, ср. [4]. Особенностью данных нелокальных условий является то, что они заданы с помощью сдвигов по пространственным переменным в односвязной ограниченной области. Линейные эллиптические и параболические нелокальные краевые задачи типа Бицадзе–Самарского рассматривались в работах [5–10] и др. Нелинейные эллиптические дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями изучались в [11].

[1] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Математический институт Российского университета дружбы народов, Москва, Россия*
**E-mai: solonukha@yandex.ru*

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d)\times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geq 3$); $Q = (0,d)$ для $n = 1$. Определим цилиндр $\Omega_T := Q\times(0,T)$. Пусть $2 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, все функции вещественнозначные. В цилиндре Ω_T рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\partial_t w(x,t) - \sum_{1\leq i\leq n}\partial_i A_i(x,t,w,\nabla w) + \\ + A_0(x,t,w,\nabla w) = f(x,t) \quad ((x,t)\in\Omega_T)\end{gathered} \tag{1}$$

с нелокальными граничными условиями

$$\begin{gathered} w|_{\Gamma^T_{rl}} = \sum_{j=1}^{J_0}\gamma^r_{lj} w|_{\Gamma^T_{rj}} \quad \left(r\in B,\, l = J_0+1,\ldots,J\right), \\ w|_{\Gamma^T_{rl}} = 0 \quad (r\notin B,\, l = 1,\ldots,J),\end{gathered} \tag{2}$$

где множество $\Gamma^T = \{\Gamma^T_{rl}\}$ определено следующим образом.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов h с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q\backslash\left(\bigcup_{h\in M}(\partial Q + h)\right)$. Множество Q_r называется подобластью. Семей-

ство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r ($r = 1, 2, \ldots$) называется разбиением области Q.

Условие 1. Пусть $\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \{\bar{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \backslash (\partial Q + h_1)]}\}$ удовлетворяет условию $\mathrm{mes}_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \backslash \mathcal{K}$. Если $(\Gamma_\rho + h) \cap \bar{Q} \neq \emptyset$ для некоторого $h \in M$, то или $\Gamma_\rho + h \subset Q$, или существует $\Gamma_r \subset \partial Q \backslash \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$, см. § 7 из [7]. Множества $\{\Gamma_\rho + h$: $\Gamma_\rho + h \subset \bar{Q}, \rho = 1, 2, \ldots, h \in M\}$ могут быть разбиты на классы. $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;

2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ совпадают.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r – номер класса, j – номер элемента в классе ($1 \le j \le J = J(r)$). Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ ($0 \le J_0 = J_0(r) < J = J(r)$). Как известно, см. § 7 из [7], для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$. Более того, если $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, то $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \emptyset$ для любых $(s_1, l_1) \neq (s, l)$; и для каждого $r = 1, 2, \ldots$ существует единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ ($l = 1, \ldots, N(s)$) (с точностью до перенумеровки). Обозначим теперь $\Gamma_{rl}^T := \Gamma_{rl} \times (0, T)$.

Условие 2. Для каждой подобласти Q_{sl} ($s = 1, 2, \ldots$, $l = 1, \ldots, N(s)$) и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl} \in C^1$ такое, что $\mathrm{mes}_n(Q_{sl} \backslash G_{sl}) < \varepsilon$, $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

$L_p(0, T; W_p^1(Q))$ – Соболевское пространство функций, интегрируемых на Ω_T в степени p вместе с первыми производными по x_i, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим

$$L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) := \\ = \{w \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : w \text{ удовлетворяют (2)}\},$$

$$L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) := \\ := \{u \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : u\big|_{x \in \partial Q} = 0 \text{ для п.в. } t \in (0, T)\}.$$

Периодические по t решения (1), (2) должны удовлетворять условию

$$w(x, 0) = w(x, T) \quad (x \in Q). \tag{3}$$

Рассматривая производную по t как распределение, введем неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t) := \{w \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : \\ \partial_t w \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)), w(x, 0) = w(x, T)\}. \tag{4}$$

Определим оператор $A : L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ по формуле

$$\langle Aw, v \rangle = \sum_{0 \le i \le n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, w, \nabla w) \partial_i v(t, x) dx dt \\ \forall v \in L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)), \tag{5}$$

здесь и ниже $\partial_0 w := w$.

Определение 1. *Функция* $w \in W_g := \mathcal{D}(\partial_t) \cap L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$ *называется обобщенным решением задачи* (1)–(3), *если она удовлетворяет операторному уравнению*

$$\partial_t w + Aw = f. \tag{6}$$

3. РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР И ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\{a_h$: $h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор R: $L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$:

$$Ru(x, t) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h, t), \tag{7}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q$: $L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$, здесь I_Q: $L_2(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ – оператор продолжения функций из $L_2(\Omega_T)$ нулем в $(\mathbb{R}^n \backslash Q) \times (0, T)$, P_Q: $L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \to L_p(\Omega_T)$ – оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ на Ω_T. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s = \{r_{ml}^s\}_{1 \le m, l \le N(s)}$:

$$r_{ml}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sl} - h_{sm} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sl} - h_{sm} \notin \mathcal{M}), \end{cases} \tag{8}$$

где h_{sm} определяется условием $Q_{sm} = Q_{s1} + h_{sm}$. Из ограниченности области Q и формулы (8) следует, что множество различных матриц R_s конечно.

Пусть $\Omega_{s1} = Q_{s1} \times (0,T)$. Изоморфизм $U_s: L_p(\Omega_s) \to \to L_p^N(\Omega_{s1})$ задан по формуле $(U_s u)_l(x,t) = u(x + h_{sl}, t)$. Оператор R_{Qs}: $L_p^N(\Omega_{s1}) \to L_p^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_s, при этом $R_Q = \sum_s U_s^{-1} R_s U_s P_s$, где P_s – проектор на $\bigcup_l Q_{sl} \times (0,T)$, см. лемму 8.6 [7] (или лемму 2.6 [8]). Более подробно построение и свойства операторов R_Q и R_{Qs} см. в [7, 8, 10, 11].

Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из $R_s (s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e_j^r ($j = 1, \ldots, J(r)$) – j-я строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 2. Будем говорить, что матрицы R_s соответствуют граничным условиям (2), если выполнено следующее

Условие 3. Существует набор $\{a_h \in \mathbb{R} : h \in \mathcal{M}\}$ такой, что для любого $s = 1, 2, \ldots$ матрицы R_s невырождены, а также для всех $r \in B$ и $s = s(r)$

$$e_l^r = \sum_{1 \le j \le J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \quad (l = J_0 + 1, \ldots, J). \tag{9}$$

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* 1–3, *а соответствующие матрицы* R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. Тогда существует множество* $\gamma = \{\gamma_{ml}^r\}$ *такое, что оператор* $R_Q: L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$ *– изоморфизм.*

Следствие 1. $w \in W_\gamma$ является обобщенным решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда существует решение операторного уравнения

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \quad u \in W, \tag{10}$$

где $W := \mathcal{D}(\partial_t) \cap L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q))$, причем $w = R_Q u$.

4. МАКСИМАЛЬНАЯ МОНОТОННОСТЬ ОПЕРАТОРА $\partial_t R_Q$

Определение 3. Оператор Λ: $L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)) \supset \mathcal{D}(\Lambda) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ монотонен, если $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle \ge 0$ для всех $u, v \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Плотно определенный, монотонный оператор Λ максимально монотонен, если не существует нетривиального расширения данного оператора, сохраняющего монотонность.

Как известно, оператор ∂_t с областью определения $\mathcal{D}(\partial_t) = W$ максимально монотонен, и $\partial_t^* = -\partial_t$, см. [12, Гл. 3, п. 2.2].

Лемма 1. $\partial_t R_Q$: $W \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *максимально монотонен.*

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Обозначим через R_s^{sym} симметрическую часть матрицы R_s: $R_s^{sym} = \frac{1}{2}(R_s + R_s^*)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–3; *а также* $R_s^{sym} > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$; *оператор* A: $L_p(0,T;W_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *задан формулой* (5), *причем функции* $A_i(x,t,\xi)$ *измеримы по* $(x,t) \in \Omega_T$, T*-периодичны по* t, *дифференцируемы по* $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, *а также справедливы оценки*

$$|A_i(x,t,\xi)| \le g_0(x,t) + c_1 \sum_{0 \le i \le n} |\xi_i|^{p-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{11}$$

$$\sum_{1 \le m,l \le N(s)} \sum_{0 \le i,j \le n} r_{ml}^s A_{ij}(x + h_{sm}, t, \zeta_{m\cdot}) \eta_{lj} \eta_{mi} \ge \ge c_2 \sum_{1 \le m \le N(s)} \sum_{1 \le i \le n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2, \tag{12}$$

$$|A_{ij}(x,t,\xi)| \le g_1(x,t) + c_3 \sum_{0 \le i \le n} |\xi_i|^{p-2} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где $A_{ij}(x,t,\xi) := \dfrac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$, $g_0 \in L_q(\Omega_T)$, $g_1 \in L_{p/(p-2)}(\Omega_T)$, *константы* $c_1, c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* $(x,t) \in \Omega_T$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и* $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$, $\zeta_{m\cdot} = \{\zeta_{m0}, \zeta_{m1}, \ldots, \zeta_{mn}\}$, $m = 1, \ldots, N(s)$.

Тогда для любого $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (1)–(3). *Более того, если* w_1 *и* w_2 *– решения, соответствующие правым частям* f_1 *и* f_2, *то*

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p \le c_4 \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q, \tag{14}$$

$c_4 > 0$ *не зависит от* $w_k \in W_\gamma$ *и* $f_k \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$.

При рассмотрении линейного оператора A условия (11)–(13) упростятся.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1–3, *а также* $R_s^{sym} > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$; $p = 2$, *оператор* A: $L_2(0,T;W_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ *задан формулой*

$$\langle Aw, v\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} \int_{\Omega_T} A_{ij}(x,t)\partial_j w \partial_i v(t,x)dxdt$$

$$\forall v \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)),$$

причем функции $A_{ij}(x,t)$ *измеримы по* $(x,t) \in \Omega_T$, *M-периодичны по* x, *T-периодичны по* t, $A_{ij} \in L_\infty(\Omega_T)$, *а также для некоторого* $c_5 > 0$, *не зависящего от* $(x,t) \in \Omega_T$,

$$\sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge c_5 \sum_{1\le i\le n} |\xi_i|^2. \tag{15}$$

Тогда для любого $f \in L_2(\Omega_T)$ *существует единственное решение операторного уравнения* (10) $u \in W$. *Более того, если* $w_1 = R_Q u_1$ *и* $w_2 = R_Q u_2$ – *решения, соответствующие правым частям* f_1 *и* f_2, *то*

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} \le c_6 \|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \tag{16}$$

$c_6 > 0$ *не зависит от* $w_k \in W_\gamma$ *и* $f_k \in L_2(\Omega_T)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа подготовлена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. V. 1. P. 138–151.
2. *Вишик М.И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1952. Т. 1. С. 187–264.
3. *Browder F.E.* Non–local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. 1964. V. 86. № 4. P. 735–750.
4. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
5. *Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2082–2093.
6. *Скубачевский А.Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сборник. 1986. Т. 129. № 2. С. 279–302.
7. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. V. 91.
8. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // УМН. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
9. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Бицадзе–Самарского для параболической системы на плоскости// ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 517–519.
10. *Солонуха О.В.* О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями// Современная математика. Фундаментальные направления. Изд-во РУДН. 2021. Т. 67. № 2. С. 349–362.
11. *Солонуха О.В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 3. С. 60–72.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

ON PERIODICAL SOLUTIONS OF PARABOLIC QUASILINEAR EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF BITSADZE–SAMARSKII TYPE

O. V. Solonukha[a,b]

[a] *Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

[b] *Mathematical Institute of the RUDN University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

We consider the quasilinear parabolic boundary value problem with nonlocal boundary condition of Bitsadze–Samarskii type. The theorem of existence and uniqueness of a periodic solution of such a problem is proved.

Keywords: periodic solution, nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarsky type, parabolic equation, maximal monotone operator, generalized solutions