ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 40–44

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.72

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ

© 2022 г. В. В. Власов[1,*], Н. А. Раутиан[1,]**

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 24.11.2021 г.
Поступило 06.12.2021 г.
После доработки 18.02.2022 г.
Принято к публикации 19.02.2022 г.

В предлагаемой работе изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главной частью указанных уравнений является абстрактное параболическое уравнение, возмущенное вольтерровым интегральным оператором. Принципиальное отличие данной работы от имеющихся состоит в том, что мы рассматриваем и изучаем интегро-дифференциальные уравнения для вектор-функций, аргументы которых принимают значения в угловой области комплексной плоскости.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, голомофная в угловой области вектор-функция, пространство Харди

DOI: 10.31857/S2686954322020187

В работе [1], а также в монографии [2] изучен класс функций $\mathfrak{R}_2(S_\theta)$, голоморфных в угловой области

$$S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C}: |\arg \tau| < \theta\},$$

и таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int_0^\infty |f(te^{i\varphi})|^2 dt \right\} < \infty.$$

В [1, 2] установлено, что снабженное соответствующей нормой $\mathfrak{R}_2(S_\theta)$ является гильбертовым пространством и для него доказана теорема типа Пэли–Винера.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор $A^* = A \geq \kappa I$ $(\kappa > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначим скалярное произведение и норму в пространстве H соответственно.

В предлагаемой работе изучены классы $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в пространстве H, голоморфных в области S_θ. При этом класс $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ состоит из вектор-функций, для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt < \infty,$$

а класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ из вектор-функций, для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \left(\left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt < \infty.$$

Превратим область определения $D(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β. Условимся в дальнейшем называть функцией (без добавления слова “вектор”) функцию со значениями в пространстве H, а функцию со значениями в $\mathbb{C}$ называть скалярной или числовой функцией.

Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ пространство (классов) функций со значениями в H, измеримых относительно меры Лебега dt на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и таких, что

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

**E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru*

***E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru*

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < +\infty.$$

Через $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ со значениями в пространстве H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+,A^n)} \equiv \left(\int_0^{+\infty} (\|u^{(n)}(t)\|^2 + \|A^n u(t)\|^2) dt\right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространствах $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [3, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_2^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Будем полагать в дальнейшем $\mathfrak{R}_2(S_0, H) = L_2(\mathbb{R}_+, H)$, $W_2^n(S_0, A^n) = W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$.

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$, $W_2^n(S_\theta, A^n)$

Укажем основные свойства пространства $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$.

Предложение 1. *Для функции $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ существуют граничные значения $f(te^{\pm\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta} \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{\pm i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0.$$

Теорема 1. 1^0 *Класс функций $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ с нормой*

$$\|f\|^*_{2,\theta} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{\int_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt\right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ со скалярным произведением*

$$\langle f, g\rangle_{2,\theta} = \int_0^{+\infty} (f(te^{-i\theta}), g(te^{-i\theta}))dt + \int_0^{+\infty} (f(te^{i\theta}), g(te^{i\theta}))dt$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Если $f(\tau)$ – произвольная функция из класса $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ и*

$$\|f\|_{2,\theta} = \langle f, f\rangle^{1/2}_{2,\theta},$$

то справедливы неравенства

$$\|f\|^*_{2,\theta} \le \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta} \le 2\|f\|^*_{2,\theta}.$$

Приведем теорему, являющуюся аналогом теоремы Пэли–Винера для пространства $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$.

Теорема 2. *Пусть $\theta \in (0, \pi/2)$. Справедливы следующие утверждения*:

1^0. *Класс функций $\mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t e^{-i\varphi}} f(te^{-i\varphi}) dt, \quad |\arg\lambda - \varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \in (-\theta, \theta), \quad f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H). \tag{1}$$

2^0. *В представлении* (1) *для каждой фиксированной функции $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ функция $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ единственна, и справедлива формула обращения*

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1}{iy} F\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y - \varphi\right)} |y|\right) dy. \tag{2}$$

3^0. *Если функция $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ представима функцией $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ по формуле* (1), *то справедливы неравенства*

$$\|F\|_{2,\frac{\pi}{2}+\theta} \le 2\|f\|_{2,\theta} \le 2\sqrt{2}\|F\|_{2,\frac{\pi}{2}+\theta}. \tag{3}$$

Перейдем к рассмотрению и изучению аналогов пространств Соболева $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций, голоморфных в угле S_θ.

Условимся в дальнейшем обозначать через $\frac{du}{d\tau}$ производную функции $u(\tau)$ в смысле функций комплексного переменного. Класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ совпадает с классом функций, голоморфных в угле S_θ, таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{\int_0^{+\infty} \left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi})\right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2\right) dt\right\}^{1/2} < +\infty.$$

В нижеследующей лемме приведен аналог теоремы о промежуточных производных, широко известной для пространств $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ (см. [3, с. 29]).

Лемма 1. *Пусть функция $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$. Тогда*

$$A^{n-j} \frac{d^j}{d\tau^j} u(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Предложение 2. *Для функции* $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ *существуют граничные значения* $u_{\pm\theta}(t)=u(te^{\pm i\theta})$ *из класса* $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ *такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})-\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{\pm i\theta})\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\|A^n(u(te^{i\varphi})-u(te^{\pm i\theta}))\|^2\right)dt=0.$$

Теорема 3. 1^0. *Класс функций* $W_2^n(S_\theta, A^n)$ *с нормой*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}=$$
$$=\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})\right\|^2+\|A^nu(te^{i\varphi})\|^2\right)dt\right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций* $W_2^n(S_\theta, A^n)$ *со скалярным произведением*

$$\langle u,v\rangle_{W_2^n(S_\theta,A^n)}=\int_0^{+\infty}\left\{\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{-i\theta}),\frac{d^n}{d\tau^n}v(te^{-i\theta})\right)+\right.$$
$$+(A^nu(te^{-i\theta}),A^nv(te^{-i\theta}))+$$
$$\left.+\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\theta}),\frac{d^n}{d\tau^n}v(te^{i\theta})\right)+(A^nu(te^{i\theta}),A^nv(te^{i\theta}))\right\}dt$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Для произвольной функции* $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}\le\sqrt{2}\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)}\le 2\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)},$$

где

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)}=\langle u,u\rangle^{1/2}_{W_2^n(S_\theta,A^n)}.$$

Приведем вариант теоремы о следах для пространства $W_2^n(S_\theta, A^n)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$. *Тогда в смысле нормы пространства H равномерно относительно* $\arg\tau$, *таких, что* $|\arg\tau|<\theta$, *существуют пределы*

$$\lim_{\tau\in S_\theta,|\tau|\to 0}A^{n-p-\frac{1}{2}}\frac{d^p}{d\tau^p}u(\tau),\quad p=0,1,\ldots,n-1.$$

Уместно отметить, что теоремы 3 и 4, а также предложение 2 приведены в статье [4]. Полные подробные доказательства сформулированных утверждений о пространствах $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ приведены в депонированной работе [5].

2. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $W_2^1(S_\theta, A)$

Рассмотрим начальную задачу для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\frac{du}{d\tau}+Au(\tau)-\int_0^\tau K(\tau-s)Au(s)ds=f(\tau),\quad \tau\in S_\theta,\quad (4)$$

$$u(+0)=\varphi_0,\quad (5)$$

где A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Ядро $K(\tau)$ принадлежит пространству Харди $\Re_1(S_\theta)$ (см. [7]), правая часть $f(\tau)\in\Re_2(S_\theta, H)$, вектор $\varphi_0\in H_{1/2}$. Отметим, что в интегро-дифференциальном уравнении (4) в интегральном слагаемом интегрирование проводится по отрезку, соединяющему начало координат и точку $\tau\in S_\theta$. Однако в силу регулярности функций $K(\tau)$, $u(\tau)$ интеграл можно брать по любому спрямляемому кусочно-гладкому контуру, соединяющему точки 0 и τ, лежащему в области S_θ.

Основным результатом является теорема о разрешимости задачи (4)–(5) в пространстве $W_2^1(S_\theta, A)$.

Теорема 5. *Пусть ядро* $K(\tau)$ *принадлежит пространству Харди* $\Re_1(S_\theta)$ *и его преобразование Лапласа* $\hat{K}(\lambda)$ *удовлетворяет оценке*

$$\sup_{\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}-\theta,\frac{\pi}{2}+\theta\right)}|\hat{K}(re^{i\varphi})|\sup_{\alpha\ge\alpha_0}\frac{a}{(a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}(1-\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}<1,\quad (6)$$

где $\alpha_0=\inf_{\|x\|=1,x\in D(A)}(Ax,x)$, *вектор-функция* $f(\tau)\in\Re_2(S_\theta, H)$, *вектор* $\varphi_0\in H_{1/2}$. *Тогда существует единственное решение* $u(\tau)\in W_2^1(S_\theta, A)$ *задачи* (4)–(5), *удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_2^1(S_\theta,A)}\le d(\|f\|^2_{\Re_2(S_\theta,H)}+\|\varphi_0\|^2_{1/2})^{1/2}\quad (7)$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(\tau)$ *и вектора* φ_0.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и ядро* $K(\tau)\equiv 0$. *Тогда существует единственное решение* $u(\tau)\in W_2^1(S_\theta, A)$ *задачи* (4), (5), *удовлетворяющее неравенству* (6).

Изложим далее идею доказательства теоремы 5. Рассмотрим преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ сильного решения $u(\tau)$ уравнения (4) с нулевыми начальными данными $\varphi_0=0$, которое имеет вид

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (4) и представима в виде

$$L(\lambda) = \lambda I + A - \hat{K}(\lambda)A,$$

где $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа ядра $K(t)$, I – единичный оператор в пространстве H.

Для доказательства теоремы 5, согласно теореме 2 (Пэли–Винера), достаточно показать, что вектор-функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$, а также получить их оценки. С этой целью мы устанавливаем, что оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ является голоморфной и допускает следующие оценки в области $G_{\theta+\pi/2} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: |\arg\lambda| < \theta + \frac{\pi}{2}\right\}$:

$$\left\|AL^{-1}(\lambda)\right\| < +\infty, \quad \left\|\lambda L^{-1}(\lambda)\right\| < +\infty. \tag{8}$$

В свою очередь, для получения оценок (8) используется представление

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda I + A)^{-1}(I - \hat{K}(\lambda)A(\lambda I + A)^{-1})^{-1} \tag{9}$$

и оценки

$$\left\|A(\lambda I + A)^{-1}\right\| \le \sup_{\alpha\ge\alpha_0} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{1/2}(1 - \sin\theta)^{1/2}}, \tag{10}$$
$$\lambda \in G_{\theta+\pi/2}, \quad \lambda = re^{i\varphi},$$

$$\left\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\right\| \le \sup_{\alpha\ge\alpha_0} \frac{r}{(a^2 + r^2)^{1/2}(1 - \sin\theta)^{1/2}}, \tag{11}$$
$$\lambda \in G_{\theta+\pi/2} \quad \lambda = re^{i\varphi},$$

а также неравенство

$$\left\|\hat{K}(\lambda)A(\lambda I + A)^{-1}\right\| < 1, \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2},$$

вытекающее из неравенств (6), (10), (11) и представления (9).

На основании оценок (8), (10), а также того, что вектор-функция $\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$, приходим к тому, что вектор-функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$. Таким образом, опираясь на теорему 2 (Пэли–Винера), мы получим, что вектор-функции $\frac{du}{d\tau}(\tau)$ и $Au(\tau)$ принадлежат пространству $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ и удовлетворяют неравенствам

$$\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)} \le d_3\|f(\tau)\|_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)}, \tag{12}$$

$$\|Au(\tau)\|_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)} \le d_4\|f(\tau)\|_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)}. \tag{13}$$

Наконец из неравнств (12) и (13) вытекает оценка

$$\|u(\tau)\|_{W_2^1(S_\theta,A)} \le d_0\|f(\tau)\|_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)}, \tag{14}$$

где $d_0 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Далее, случай неоднородных начальных данных $\varphi_0 \ne 0$ стандартным образом сводится к задаче с однородными начальными данными и новой правой частью уравнения (4) $f_1(\tau) = f(\tau) + h(\tau)$, где

$$h(\tau) = \int_0^\tau K(\tau - \zeta)A\exp(-\zeta A)\varphi_0 d\zeta,$$

с последующей оценкой вектор-функции $h(\tau)$.

З а м е ч а н и е 1. Хорошо известно, что решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности при естественных предположениях о начальных данных допускает аналитическое продолжение по временной переменной t в угловую область комплексной плоскости. С этим тесно связана теория аналитических полугрупп операторов (см., например, монографии [6, 8–10]).

В утверждении следствия теоремы 5 установлена не только аналитичность решения абстрактного параболического уравнения, но и получена оценка (7) в гильбертовых пространствах $W_2^1(S_\theta, A)$, $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$, что является значительно более глубоким результатом, нежели результат об аналитичности (голоморфности) решения.

Из доказанной теоремы 5 также немедленно вытекает утверждение для $\theta = 0$, т.е. для случая, когда задача (4), (5) рассматривается на полуоси $\mathbb{R}_+$, а не в угловой области S_θ. При этом пространство $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ переходит в пространство $L_2(\mathbb{R}_+, H)$, а пространство $W_2^1(S_\theta, A)$ в пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$.

Уместно отметить, что приведенная теорема 5 тесно связана с теоремой 2.1 из работы [11], а также теоремой 3.2.3 из монографии [12]. В указанных теоремах установлена корректная разрешимость начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения, близкого уравнению (4), в весовых пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$.

З а м е ч а н и е 2. Существенное отличие приведенной теоремы 5 от результатов о разрешимости в традиционных пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, ранее установленных в работах [11, 12], состоит в том, что мы приводим оценки преобразования Лапласа решения $\hat{u}(\lambda)$ в области $S_{\theta+\pi/2}$, а не в правой полуплоскости. При этом существенно использовалась теорема 2 (аналог теоремы Пэли–Винера) для угловых областей S_θ и

$S_{\theta+\pi/2}$, в то время как в предшествующих работах использовалась традиционная теорема Пэли–Винера.

Отметим, что ряд утверждений о разрешимости интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в пространствах Соболева $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ приведен в обзорной статье [13].

Ряд глубоких результатов о разрешимости эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева приведен в работе [14].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Теоремы 1 и 2 доказаны при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики. Теоремы 3, 4 доказаны при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ, проект 20-01-00288. Теорема 5 доказана при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М.М., Мартиросян В.М.* Теоремы Винера–Пэли и Мюнца–Саса // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1977. Т. 41. 4. С. 868–894.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
3. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
4. *Власов В.В.* Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М.В. Келдыша // ДАН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1289–1293.
5. *Власов В.В.* О некоторых пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // Рукопись деп. в ВИНИТИ 20.08.1981 г. № 4177-81. 38 с.
6. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Из-во иностр. лит. 1962. 830 с.
7. *Григорян Ш.А.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловых областях // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. 13. № 5–6. С. 461–489.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
10. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. Graduate Texts in Mathematics. V. 194. 586 p.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС–Пресс, 2016. 488 с.
13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Исследование интегро-дифференциальных уравнений методами спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Т. 67. № 2. С. 255–284.
14. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.

ON CORRECT SOLVABILITY OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SPACES OF VECTOR FUNCTIONS, HOLOMORPHIC AT THE ANGLE

V. V. Vlasov[a] and N. A. Rautian[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichy

The proposed paper studies integro-differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space. The main part of this equation is an abstract parabolic equation perturbed by the Volterra integral operator. The fundamental difference between this work and the existing ones is that we consider and study integro-differential equations for vector functions, the arguments of which take values in the angular domain on the complex plane.

Keywords: Volterra integro-differential equations, holomophic in the angular domain vector function, Hardy space