ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 28–31

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ТОЧЕЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. И. В. Асташова[1,3*], Д. А. Лашин[4, **], А. В. Филиновский[2,1,*]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 01.12.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принято к публикации 14.03.2022 г.

Рассматривается задача управления с точечным наблюдением для одномерного параболического уравнения, возникающая в математической модели управления климатом в промышленных теплицах. В данной работе мы исследуем общее уравнение с переменными коэффициентом диффузии, коэффициентом конвекции и потенциалом обеднения. Для экстремальной задачи минимизации интегрального весового квадратичного функционала качества установлены существование и единственность минимизирующей функции, изучены точная управляемость и плотная управляемость задачи. Получены необходимые условия экстремума и изучены качественные свойства минимизирующей функции.

Ключевые слова: параболическое уравнение, смешанная задача, точечное наблюдение, экстремальная задача, точная управляемость, плотная управляемость, необходимое условие

DOI: 10.31857/S268695432203002X

Будем рассматривать смешанную задачу для уравнения с конвективным слагаемым и обедняющим потенциалом:

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = (0,1)\times(0,T), \quad T > 0,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \xi(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

где a, b и h – достаточно гладкие функции в $\bar{Q}_T$, $0 < a_1 \le a(x,t) \le a_2 < \infty$, $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\psi \in W_2^1(0,T)$, $\xi \in L_2(0,1)$.

Изучается задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка (функции ξ и ψ считаем фиксированными), стараемся сделать температуру $u(x_0,t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$ близкой к заданной функции $z(t) \in L_2(0,T)$ на всем интервале времени $(0,T)$. Обозначим через $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ множество управляющих функций φ, а через $Z \subset L_2(0,\ T)$ – множество целевых функций z, будем далее считать множество Φ непустым, замкнутым и выпуклым. Качество управления оцениваем функционалом

$$J[z,\rho,\varphi] = \int_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2 \rho(t)\,dt, \tag{4}$$
$$\varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

при этом u_φ – решение задачи (1)–(3) с заданной управляющей функцией φ, $\rho(x) \in L_\infty(0,T)$ – весовая функция, $\operatorname{ess}\inf\limits_{t\in(0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$.

Считая функции z и ρ фиксированными, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi]. \tag{5}$$

Эта задача возникает в модели управлении климатом в промышленных теплицах (см. [1, 2]). Подробные пояснения к изучаемой математической модели содержатся в [21]. Заметим, что экстремальные задачи для уравнения теплопроводности рассматривались в многочисленных работах (см., например, [3–5, 7]). Наиболее изученными явля-

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[3] *Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия*
[4] *НПФ “ФИТО”, Ленинский р-н, г. Московский, Московская обл., Россия*
**E-mail: ast.diffiety@gmail.com*
***E-mail: dalashin@gmail.com*
****E-mail: flnv@yandex.ru*

ются задачи с финальным наблюдением [3–6, 9]. Достаточно полный обзор ранних результатов содержится в [6], обзор новых результатов имеется в [1, 9, 10, 14, 15]. По сравнению с предшествующими статьями о параболических задачах управления, где рассматриваются задачи с финальным или распределенным наблюдением [5, 7, 8, 11], мы рассматриваем точечное наблюдение. Новым является и тип функционала качества. Эта работа развивает и обобщает результаты работ авторов [16–21]. В данной работе мы исследуем более общее уравнение с переменным коэффициентом диффузии a, коэффициентом конвекции b и потенциалом h, называемым потенциалом обеднения, устанавливаем качественные свойства соответствующей минимизирующей функции. Помимо исследования более общего уравнения (с переменным коэффициентом $a = a(x,t)$, конвективным слагаемым $b(x,t)$ и неоднородным начальным условием) мы также доказываем ряд новых результатов: устанавливаем качественные свойства минимизирующей функции и выводим необходимые условия оптимальности. При доказательстве используем результаты и методы, приведенные в [12, 13].

Определение 1. ([22], с. 15) *Будем обозначать через $V_2^{1,0}(Q_T)$ банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0\le t\le T}\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} \tag{6}$$

таких, что $t \mapsto u(\cdot,t)$ – непрерывное отображение $[0,T] \to L_2(0,1)$.

Обозначим через $\widetilde{W}{}^1_2(Q_T)$ множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T) = 0$, $\eta(0,t) = 0$.

Определение 2. *Решением задачи* (1)–(3) *будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,t) = \varphi(t)$ и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T}(a(x,t)u_x\eta_x - b(x,t)u_x\eta - h(x,t)u\eta - u\eta_t)\,dx\,dt = \\ = \int_0^1 \xi(x)\eta(x,0)\,dx + \int_0^T a(1,t)\psi(t)\eta(1,t)\,dt \tag{7}$$

для всех $\eta \in \tilde{W}_2^1(Q_T)$.

Теорема 1. ([18], [19]) *Задача* (1)–(3) *имеет единственное решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, и для него справедливо неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le C_1\left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}\right), \tag{8}$$

с некоторой постоянной C_1, не зависящей от φ, ψ и ξ.

Следствие 1. *Отображение $\{\xi,\varphi,\psi\} \mapsto$ и непрерывно из пространства $L_2(0,\,1) \times W_2^1(0,T)\times W_2^1(0,T)$ в $V_2^{1,0}(Q_T)$.*

Для получения следующей оценки нам понадобится следующий *принцип положительности*.

Теорема 2. *Пусть u – решение задачи* (1)–(3) *с неотрицательными начальной и граничными функциями:* $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)}\varphi \ge 0$, $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)}\psi \ge 0$, $\operatorname{ess}\inf_{x\in(0,1)}\xi \ge 0$. *Тогда решение и также неотрицательно*: $\operatorname{ess}\inf_{(x,t)\in Q_T} u \ge 0$.

Замечание 1. Для функций φ и ψ имеем $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)}\varphi = \min_{t\in(0,T)}\varphi$, $\operatorname{ess}\inf_{t\in(0,T)}\psi = \min_{t\in(0,T)}\psi$.

Для доказательства этого утверждения делается замена неизвестной функции, в результате которой задача (1)–(3) сводится к задаче с краевым условием третьего рода. Далее требуемый результат получается применением модифицированного метода барьерных функций.

С использованием теоремы 2 получена следующая оценка.

Теорема 3. *Пусть* $a_t \ge 0$, $b_x - h \ge 0$, $(x,t)\in Q_T$; $b \ge 0$, $(x,t)\in[0,x_0]\times[0,T]$, $x_0 \in (0,1]$; $b(1,t) \le 0$, $t \in [0,T]$. *Тогда для решения задачи* (1)–(3) *имеет место неравенство*

$$\|u(x_0,\cdot)\|_{L_1(0,T)} \le \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}). \tag{9}$$

Следствие 2. *Пусть для a, b, h выполнены условия теоремы* 3, $\psi = 0$, $\xi = 0$. *Тогда для решения задачи* (1)–(3) *имеет место неравенство*

$$\|u(x_0,\cdot)\|_{L_1(0,T)} \le \|\varphi\|_{L_1(0,T)}. \tag{10}$$

Из теоремы 3 следует оценка снизу нормы управляющей функции через значение функционала качества.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \ge \max\left\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2} - \\ - \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})\right\}. \tag{11}$$

Следствие 3. *Пусть для a, b, h выполнены условия теоремы* 3, $\psi = 0$, $\xi = 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \ge \max\left\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2}\right\}. \tag{12}$$

Теорема 5. *Если множество Φ ограничено, то для любой $z \in L_2(0,T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Исследуем свойства минимизирующей функции φ_0 как элемента множества Φ.

Теорема 6. *Если множество $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ ограничено, коэффициенты a, b и h в уравнении* (1) *не зависят от t и $m[z,\rho,\Phi] > 0$, то $\varphi_0 \in \partial\Phi$. Для любого замкнутого выпуклого Φ_1, такого, что $\Phi_1 \subset \mathrm{Int}\Phi$, справедливо неравенство $m[z,\rho,\Phi_1] > m[z,\rho,\Phi]$.*

Одной из важных проблем является проблема точной управляемости экстремальной задачи.

Определение 3. *Будем говорить, что задача* (1)–(3), (5) *является точно управляемой из множества Φ во множество Z, если для любого $z \in Z$ существует управляющая функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой*

$$J[z,\rho,\varphi_0] = 0. \tag{13}$$

При этом функцию φ_0 будем называть точным управлением.

Следующая теорема утверждает, что множество Z функций $z \in L_2(0,T)$, допускающих точную управляемость – достаточно "малое" подмножество $L_2(0,T)$.

Теорема 7. *Множество Z всех функций $z \in L_2(0, T)$, допускающих точную управляемость, то есть таких, что $J[z,\rho,\varphi] = 0$ для некоторой $\varphi \in W_2^1(0, T)$, является множеством первой категории в $L_2(0, T)$.*

Перейдем теперь к исследованию вопроса о плотной управляемости.

Определение 4. *Будем говорить, что задача* (1)–(3), (5) *является плотно управляемой из множества Φ во множество Z, если для всех $z \in Z$ выполнено равенство*

$$m[z,\rho,\Phi] = 0.$$

Следующая теорема устанавливает плотную управляемость задачи (1)–(3), (5) из $W_2^1(0,T)$ в $L_2(0, T)$.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты a, b и h в* (1) *не зависят от t. Тогда для любой $z \in L_2(0,T)$ справедливо равенство*

$$m[z,\rho,W_2^1(0,T)] = 0. \tag{14}$$

Отметим, что доказательство этого результата основано на применении теоремы Титчмарша о свертке ([24], гл. 11, теорема 152).

Важным также является вопрос о получении необходимых условий минимума для $\varphi_0 \in \Phi$. Необходимое условие может быть сформулировано в терминах сопряженной к (1)–(3), (5) задачи. Так мы будем называть смешанную задачу для обратно параболического уравнения

$$\begin{gathered} p_t + (a(x,t)p_x)_x - (b(x,t)p)_x + h(x,t)p = \\ = \delta(x-x_0)\cdot\big(u_\varphi(x_0,t) - z(t)\big)\rho(t), \quad (x,t) \in Q_T, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} p(0,t) = 0, \quad a(1,t)p_x(1,t) - b(1,t)p(1,t) = 0, \\ 0 < t < T, \end{gathered} \tag{16}$$

$$p(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{17}$$

где u_φ – решение (1)–(3).

Определение 5. *Решением задачи* (15)–(17) *будем называть функцию $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $p(0,t) = 0$ и интегральному тождеству*

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q_T} \big((a(x,t)p_x - b(x,t)p)\eta_x + p\eta_t - h(x,t)p\eta\big)dxdt = \\ = -\int\limits_0^T (u_{\varphi_0}(c,t) - z(t))\rho(t)\eta(c,t)dt \end{gathered} \tag{18}$$

для всех функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, таких, что $\eta(0,t) = 0$ и $\eta(x,0) = 0$.

Теорема 9. *Задача* (15)–(17) *имеет единственное решение $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и для него справедливо неравенство*

$$\begin{gathered} \|p\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le C_2\Big(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \\ + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|z\|_{L_2(0,T)}\Big), \end{gathered} \tag{19}$$

где постоянная C_2 не зависит от φ, ψ, ξ и z.

Теорема 10. *Пусть $\varphi_0 \in \Phi$ – минимизирующая функция. Тогда для всех управляющих функций $\varphi \in \Phi$ справедливо следующее неравенство:*

$$\int\limits_0^T a(0,t)p_x(0,t)\big(\varphi(t) - \varphi_0(t)\big)\rho(t)dt \le 0, \tag{20}$$

где p – решение задачи (15)–(17) *с $\varphi = \varphi_0$.*

Заметим, что след производной $p_x|_{x=0}$ существует в силу теоремы о регулярности решений параболических краевых задач (см., [23], гл. 3, пар. 12).

Необходимое условие для минимизирующей функции можно получить и без использования сопряженной задачи. Так, если $\varphi_0 \in \Phi$ – минимизирующая функция, то для любой управляющей функции $\varphi \in \Phi$ выполнено следующее неравенство

$$\int\limits_0^T (u_{\varphi_0}(x_0,t) - z(t))(u_\varphi(x_0,t) - u_{\varphi_0}(x_0,t))\rho(t)dt \ge 0. \tag{21}$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A.* On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. № 23. P. 198–204.
2. *Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D.* On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8.
3. *Butkovskiy A. G.* Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами // Автомат. и телемех. 1961. Т. 22. № 1. С. 17–26.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 463 с.
5. *Егоров Ю.В.* Некоторые задачи теории оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963, Т. 3. № 5. 887–904 с.
6. *Butkovskiy A.G., Egorov A.I., Lurie K.A.* Optimal control of Distributed Systems // SIAM J. Control. 1968. V. 6. № 3. P. 437–476.
7. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
8. *Лионс Ж.Л.* Об оптимальном управлении распределенными системами // УМН. 1973. Т. 28. Вып. 4. С. 15–46.
9. *Troltzsch F.* Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence.: AMS, 2010. 399 p.
10. *Lurie K.A.* Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Springer. Berlin, 2013. 499 p.
11. *Friedman A.* Optimal control for parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 18. № 3. P. 479–491.
12. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Kondratiev V.A., Muravei L.A.* Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations // J. of Natural Geometry. 2003. V. 23. № 1–2. P. 1–126.
13. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. 647 с.
14. *Farag M.H., Talaat T.A., Kamal E.M.* Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problems // Cubo. 2013. V. 15. № 2. P. 111–119.
15. *Sener S., Subasi M.* On a Neumann boundary control in a parabolic system. Bound. Value Probl. 2015. V. 166. 16 p. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0430-5
16. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25.
17. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5, P. 595–609.
18. *Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.* Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Труды Моск. матем. общ-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274.
19. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* Controllability and Exact Controllability in a Problem of Heat Transfer with Convection and Time Distributed Functional // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 148–157.
20. *Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D.* On properties of the control function in an extremal control problem with a point observation for a parabolic equation // Funct. Diff. Equ. 2021. V. 28. № 3–4. P. 99–102.
21. *Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D.* On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS Trans. on Appl. and Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192.
22. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Физматлит, 1973. 400 с.
23. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. 736 с.
24. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. 479 с.

ON THE EXTREME CONTROL PROBLEM WITH POINT OBSERVATION FOR A PARABOLIC EQUATION

I. V. Astashova[a,c], D. A. Lashin[d], and A. V. Filinovskiya[b]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b]*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

[c]*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia, Moscow, Russian Federation*

[d]*OOO NPF "FITO", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of RAS V.V. Kozlov

In this paper we consider a control problem with point-wise observation for a one-dimensional parabolic equation, which arises in a mathematical model of climate control in industrial greenhouses. We study a general equation with variable di˙usion coe°cient, convection coe°cient, and depletion potential. For the extremum problem of minimizing the integral weighted quadratic cost functional, we establish the existence and uniqueness of the minimizing function. We also study exact controllability and dense controllability of the problem. Necessary conditions for an extremum are obtained, and qualitative properties of the minimizing function are studied.

Keywords: Parabolic equation, mixed problem, point observation, extremal problem, exact controllability, dense controllability, necessary condition