ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 32–35

——— МАТЕМАТИКА ———

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССОЦИАЦИИ ГАЗОВОГО ГИДРАТА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЛЬДА И СОЛЕНОСТИ

© 2022 г. Ю. А. Повещенко<sup>1,\*</sup>, Г. И. Казакевич<sup>2,\*\*</sup>, В. О. Подрыга<sup>1,\*\*\*</sup>, П. И. Рагимли<sup>1,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным Поступило 20.09.2021 г. После доработки 01.02.2022 г. Принято к публикации 11.03.2022 г.

Работа посвящена математическому моделированию процессов диссоциации газовых гидратов в пористой среде. Разработаны численные методы решения задач подземной гидромеханики, связанные с таянием газовых гидратов в криолитозоне северных регионов и на шельфе арктических морей. Рассматриваемая система уравнений учитывает наличие льда и фазовый переход лед-вода, а также присутствие соли. С помощью метода расшепления по физическим процессам система преобразована к блочному виду, в котором разделены диссипативная и гиперболическая части. Это позволяет эффективно применить для каждого блока свой численный подход. В итоговом алгоритме выделены зоны, характеризующиеся разным набором уравнений и независимых переменных. В целях повышения устойчивости метода проведены термодинамический анализ физических процессов и математическое согласование задач в зонах. В результате построена единая вычислительная схема и проведены пробные расчеты. Анализ результатов подтвердил эффективность разработанного численного подхода.

*Ключевые слова:* газовые гидраты, фильтрация, математическое моделирование **DOI:** 10.31857/S2686954322030080

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в мире уделяется большое внимание изучению природных газовых гидратов как возможных источников сырья и потенциальной угрозы, связанной с выделением метана при их разрушении, в частности, под воздействием климатических изменений. Часть обнаруженных и гипотетических скоплений газовых гидратов связана с зонами многолетнемерзлых пород и шельфом арктических морей. Во многих работах выдвигаются и подробно исследуются гипотезы о связи ряда природных процессов, в том числе и катастрофического характера, таких как образование воронок на суше в северных регионах, широкомасштабное выделение газа на дне океанов, с разложением гидратов. В силу недостаточности данных эта проблема является дискуссионной. Одним из методов исследования здесь является

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова

Российской академии наук, Москва, Россия

математическое моделирование. При его применении к процессам, связанным с газовыми гидратами в криолитозоне северных регионов и на шельфе арктических морей, в общей схеме расчетов фильтрационных процессов необходимо учесть еще одну фазу – лед. В подобных задачах также сушественно влияние соли на условия термодинамического равновесия гидратов [1, 2], поскольку соль содержится в морской воде и используется в технологических процессах в качестве ингибитора. Работа посвящена разработке математической модели диссоциации газовых гидратов в пористой среде и соответствующего численного алгоритма, позволяющих учесть наличие льда и соответствующего фазового перехода, соли, а также растворенного газа. В качестве основы взяты уравнения баланса масс, импульса и энергии в предположении о термодинамически равновесном характере процесса.

#### 2. ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

В газогидратной фазово-равновесной зоне (ГРЗ) уравнения баланса массы флюидов для воды (w), газа (g) и соли (c – в растворе, b – осадок), а также полной внутренней энергии системы, включая скелет, могут быть записаны в следующей дивергентной форме:

<sup>\*</sup>E-mail: hecon@mail.ru

<sup>\*\*</sup>*E-mail: gkazakevich@vandex.ru* 

<sup>\*\*\*</sup>E-mail: pvictoria@list.ru

<sup>\*\*\*\*</sup>E-mail: pervin@rehimli.info

$$\frac{\partial \left\{ m[S_{\nu}S_{lib}R_{wi} + (1 - S_{\nu})\beta_{w}\rho_{\nu}] \right\}}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\beta_{l}^{w}\rho_{l}\mathbf{V}_{l} + \mathbf{M}_{l}^{w}\right] = 0,$$
(1)

$$\frac{\partial \{m[S_v(1-S_{lib})\rho_g + (1-S_v)(1-\beta_w)\rho_v + S_v S_{lib}C_l\beta_l^g \rho_l]\}}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_g \mathbf{V}_g + \beta_l^g \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^g] = 0,$$
(2)

$$\frac{\partial \{m[S_v S_{lib} R_{cb}]\}}{\partial t} + \operatorname{div}[\beta_l^c \rho_l \mathbf{V}_l + \mathbf{M}_l^c] = 0,$$
(3)

$$\frac{\partial \{m[S_{\nu}(S_{lib}E_{lib} + (1 - S_{lib})\rho_{g}\varepsilon_{g}) + (1 - S_{\nu})\rho_{\nu}\varepsilon_{\nu}] + (1 - m)\rho_{s}\varepsilon_{s}\}}{\partial t} + \operatorname{div}\{\rho_{l}\varepsilon_{l}\mathbf{V}_{l} + \rho_{g}\varepsilon_{g}\mathbf{V}_{g} + P(\mathbf{V}_{l} + \mathbf{V}_{g}) + \mathbf{W}\} = 0.$$
(4)

Здесь m — пористость; индексы обозначают: v гидрат, l - жидкая фаза, включающая воду (w),растворенные в ней газ (g) и соль (c), g – свободный газ,  $i - \text{лед}, b - \text{осадок соли}, s - \text{скелет}; S_v$ растепленность порового пространства от гидратов,  $(1 - S_v)$  — его гидратонасыщенность; индекс lib отвечает суммарно жидкой фазе, льду и солевому осадку в растепленном поровом пространстве;  $S_{lib}$  — их объемная доля в ( $mS_v$ ). Для объемных долей  $C_l$ ,  $C_i$ ,  $C_b$ , объединенных в  $S_{lib}$ , выполнено соотношение:  $C_l + C_i + C_b = 1$ . Далее,  $\beta_w$  и  $(1 - \beta_w) - \beta_w$ массовые доли воды и газа в гидрате. В жидкой фазе (1) для компонентных массовых долей воды  $(\beta_l^w)$  и растворенных в ней газа  $(\beta_l^g)$  и соли  $(\beta_l^c)$  также выполнено соотношение:  $\beta_l^w + \beta_l^g + \beta_l^c = 1$ . В ГРЗ принимается, что  $\beta_l^g = \beta_l^g(P,T)$ . Если газ в жидкой фазе отсутствует, то ( $\beta_l^g = 0$ ). Соответственно массовая доля воды и соли в жидкой фазе  $\beta_l^{wc} = \beta_l^w + \beta_l^c = 1 - \beta_l^g = \beta_l^{wc}(P,T),$ либо  $\beta_l^{wc} = 1$  при  $\beta_{l}^{g} = 0$ . Плотности и их доли обозначены как { $\rho_{\gamma}$ ,  $\chi = v, l, w, i, g, b, lib, s$ , где  $\rho_{lib} = C_l \rho_l + C_i \rho_i + C_b \rho_b$ . Также вводятся дольные плотности:  $R_{wi}$  =  $= C_l \beta_l^w \rho_l + C_i \rho_i$  – всей воды и льда, содержащихся в  $S_{lib}$ , и  $R_{cb} = C_l \beta_l^c \rho_l + C_b \rho_b$  — всей соли, содержащейся в  $S_{lib}$ . Аналогично,  $\{\varepsilon_{\chi}, \chi = v, l, w, i, g, b, lib, s\}$  – внутренние энергии единицы массы гидрата, жидкой фазы, воды, льда, свободного газа, солевого осадка, также внутренние энергии единицы массы  $S_{lib}$  консистенции и скелета. При этом для  $E_{lib} = \rho_{lib} \epsilon_{lib}$  – внутренней энергии жидкой фазы, льда и солевого осадка, нормированной единицей объема, в  $S_{lib}$  консистенции выполнено  $E_{lib} =$  $= C_l \rho_l \varepsilon_l + C_i \rho_i \varepsilon_i + C_b \rho_b \varepsilon_b.$ 

Предполагается выполнение закона Дарси с учетом гравитации, но без учета капиллярных сил вода-газ: { $\mathbf{V}_{\alpha} = -k_{lib} \cdot k_{r\alpha}/\mu_{\alpha} (\nabla P - \mathbf{g}\rho_{\alpha}), \alpha = l, g$ }, где **g** – вектор ускорения свободного падения, P – давление,  $\mu_l$  и  $\mu_g$  – динамические вязкости жид-кости и свободного газа,  $k_{lib}$  – перерасчет абсо-

лютной проницаемости с учетом части пор, занятой льдом и солевым осадком,  $k_{rl}$  и  $k_{rg}$  – относительные фазовые проницаемости жидкости и свободного газа с учетом подвижности в  $S_{lib}$  консистенции только жидкой фазы (l). **W** – поток тепла.

Диффузионные потоки воды, газа и соли в жидкой фазе представлены процессом молекулярной диффузии в пористой среде [9] { $\mathbf{M}_{l}^{\alpha} = -mD_{l}^{\alpha}\rho_{l}\nabla\beta_{l}^{\alpha}$ ;  $\alpha = w, g, c$ } с коэффициентами  $D_{l}^{\alpha}$ . Совместный диффузионный поток воды и соли в жидкой фазе определяется как  $\mathbf{M}_{l}^{wc} = \mathbf{M}_{l}^{w} + \mathbf{M}_{l}^{c}$ . Поток тепла в уравнении внутренней энергии (4) имеет вид:

$$\mathbf{W} = -\{m[S_{v}\left(S_{lib}\lambda_{lib} + (1 - S_{lib})\lambda_{g}\right) + (1 - S_{v})\lambda_{v}] + (1 - m)\lambda_{s}\}\nabla T,$$

что соответствует среде с коэффициентами { $\lambda_{\chi}(P, T)$ ,  $\chi = v, l, w, i, g, b, lib, s$ }. Здесь  $\lambda_{lib} = C_l \lambda_l + C_i \lambda_i + C_b \lambda_b$ .

#### 3. РАСЩЕПЛЕНИЕ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

В качестве двух базовых переменных выбираются величины  $S_{lib}$  и  $S_v$ . Остальные параметры задаются вектором  $\pi = \{P, T, C_{\gamma}, \beta_l^{\alpha}; \gamma = l, i, b, \alpha = w, g, c\}$ , состоящим из двух основных независимых переменных  $\pi_2$  и шести вспомогательных (за исключением бессолевой ГРЗ в отсутствие жидкой фазы с одной базовой переменной  $\pi_1$  и вырожденным дольно-солевым уравнением).

Преобразование системы уравнений, позволяющее выделить диссипативный блок, производится методом расщепления по физическим процессам, предложенным в работе [3]. В результате для пары оставшихся независимых переменных получается подсистема, не содержащая производные по времени от величин  $S_{lib}$  и  $S_v$  и состоящая из уравнения пьезопроводности в ГРЗ с жидким раствором и твердофазными включениями, обобщающего диссипативное уравнение теории гидратов, полученное в работе [3], и дольно-солевого уравнения.

## 4. РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ ФИЛЬТРАЦИИ НА НЕСКОЛЬКО ЗОН

В задачах фильтрации, связанных с газовыми гидратами, исходная область разбивается на несколько зон, различающихся по уравнениям и набору основных неизвестных, описывающих процесс. При отсутствии соли, льда, растворенного газа таких зон три [4]: трехфазная (ГРЗ), где присутствуют газ, вода и гидрат, талая – где гидратов нет и гидратно-стабильная с отсутствующими свободным газом или водой. В первой зоне основные неизвестные –  $S_v$ ,  $S_w$ , P. Температура определяется по давлению из условия фазового равновесия. Во второй зоне основные неизвестные –  $S_w$ , P, T. В третьей –  $S_v$ , P, T.

В рассматриваемом случае возникает семь зон, для которых с использованием правила фаз Гиббса определено количество независимых параметров:

 Жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью.

 $\pi_2 = \{P, T\}, C_l = 1, C_i = C_b = 0, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \\ \beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$ 

2. Солевой осадок и жидкая фаза в ГРЗ с насыщенными газом и солью.

 $\pi_2 = \{P, C_l\}, \quad T = T_{dis}(P), \quad C_i = 0, \quad C_b = 1 - C_l, \\ \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \quad \beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \quad \beta_l^c = \beta_l^c(P, T).$ 

3. Ненасыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\pi_2 = \{C_l, \beta_l^c\}, \ P = P(\beta_l^c), \ T = T_{dis}(P), \ C_i = 1 - C_l, \\ C_b = 0, \ \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \ \beta_l^g = \beta_l^g(P, T).$$

4. Насыщенная солью жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

 $\begin{aligned} & \pi_2 = \{P, C_l\}, \quad T = T(P), \quad C_i = 1 - C_l, \quad C_b = 0, \\ & \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \, \beta_l^g = \beta_l^g(P, T), \, \beta_l^c = \beta_l^c(P, T). \end{aligned}$ 

5. Солевой осадок и жидко-ледяная смесь в ГРЗ.

$$\pi_2 = \{C_l, C_i\}, P_0, T_0, C_b = 1 - C_l - C_i, \beta_l^w = 1 - \beta_l^g - \beta_l^c, \beta_l^w = \beta_l^g (P_0, T_0), \beta_l^c = \beta_l^c (P_0, T_0).$$

Давление  $P_0$  и температура  $T_0$  являются константами, определяемыми для данного процесса экспериментально.

6. Солевой осадок в ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

$$\pi_2 = \{P, C_i\}, T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_b = 1 - C_i.$$

7. Бессолевая ГРЗ в отсутствие жидкой фазы.

$$\pi_1 = \{P\}, T = T_{dis}(P), C_l = 0, C_i = 1, C_h = 0.$$

С помощью метода характеристик получены условия согласования систем уравнений, отвечающих областям с разным количеством фаз и содержащих разное число неизвестных.

# 5. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

При численных расчетах вычисления ускоряются за счет разделения системы на диссипативную и гиперболическую части. Из диссипативной части по неявной схеме находятся переменные вектора  $\pi_2$ , а на их основе вычисляются термодинамические параметры и по явной схеме рассчитывается перенос насыщенностей  $S_{lib}$  и  $S_v$ . Также проводится перерасчет абсолютной и фазовой проницаемости.

При решении задач двухфазной фильтрации широко используется аппроксимация фазовых проницаемостей вверх по потоку [5]. В работе [3] методом характеристик показано, что при учете газовых гидратов часть величин надо брать вниз по потоку. В данной работе получены обобщения этих результатов с учетом льда и соли.

Для численного решения полученной системы vpавнений используется метод опорных операторов [6, 7], позволяющий аппроксимировать уравнения в частных производных на нерегулярных сетках. В работе [8] для подобных сеток в целях обеспечения вычислительной устойчивости разностной схемы проведена эффективная монотонизация аппроксимации по насыщенностям водой и гидратами, а также по нелинейному переносу внутренних энергий свободных воды и газа в гидратизированной пьезопроводной части задачи. В той же работе при дискретизации задачи диссоциации газовых гидратов в пористой среде использовался простой в реализации метод своболно-объемной аппроксимании сеточных функций по времени, учитывающий долю объема в порах, занятой флюидами. В представленной работе используются методы, аналогичные методам работы [8], обобщенные на случай диссоциации газовых гидратов в пористой среде с учетом льда и соли.

Итоговый численный алгоритм апробирован на одномерной модельной задаче и подтвердил свою эффективность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Liu X., Flemings P.B. Dynamic multiphase flow model of hydrate formation in marine sediments // J. Geophys. Res. 2007. V. 112. B03101. P. 1–23.
- 2. *Малахова В.В., Елисеев А.В.* Влияние диффузии солей на состояние и распространение многолетнемёрзлых пород и зоны стабильности метан-гидратов шельфа моря Лаптевых // Лёд и Снег. 2020. Т. 60. № 4. С. 533–546.
- 3. Повещенко Ю.А., Казакевич Г.И. Математическое моделирование газогидратных процессов // ММС. 2011. № 3. С. 105–110.
- Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б. Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями //

Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 40. 32 с.

- 5. Азиз. Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
- Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО "Критерий", 1996. 273 с.
- Дмитриевский А.Н., Лобковский Л.И., Казакевич Г.И., Повещенко Ю.А., Баланюк И.Е., Илюхин Л.Н. Численное моделирование движения флюидов в про-

цессе формирования залежей углеводородов на примере Предверхоянского прогиба // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. 1995. № 7. С. 2–6.

- Poveshchenko Yu., Rahimly P., Rahimly O., Podryga V., Gasilova I. A numerical approach to study the thermal influence on gas hydrates by physical process splitting // IJNAM. V. 17. № 3. P. 404–433.
- 9. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.

# MATHEMATICAL MODELING OF DISSOCIATION OF GAS HYDRATE IN POROUS MEDIUM TAKING INTO ACCOUNT ICE AND SALINITY

### Yu. A. Poveshchenko<sup>a</sup>, G. I. Kazakevich<sup>b</sup>, V. O. Podryga<sup>a</sup>, and P. I. Rahimly<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
 <sup>b</sup> Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
 Presented by Academician of RAS B.N. Chetverushkin

The work is devoted to the mathematical modeling of the dissociation processes of gas hydrates in a porous medium. Numerical methods were developed for solving problems of underground hydromechanics associated with gas hydrates in the cryolithozone of the northern regions and on the shelf of the Arctic seas. The considered system of equations takes into account the presence of ice and the ice-water phase transition, as well as the presence of salt. Using the method of splitting by physical processes, the system was transformed to a block form, in which the dissipative and hyperbolic parts were separated. This made it possible to effectively apply its own numerical approach for each block. In the final algorithm, zones were identified that were characterized by a different set of equations and independent variables. In order to increase the stability of the method, a thermodynamic analysis of physical processes and mathematical coordination of problems in the zones were carried out. As a result, a unified computational scheme was built and test calculations were carried out. Analysis of the results confirmed the effectiveness of the developed numerical approach.

Keywords: gas hydrates, filtration, mathematical modeling