ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 36–41

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. Г. Романов[1,*]

Поступило 07.02.2022 г.
После доработки 10.03.2022 г.
Принято к публикации 20.03.2022 г.

Для уравнения $u_{tt} - \Delta u - f(x,u) = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^4$, в котором $f(x,u)$ – гладкая функция своих переменных, финитная по x, изучается задача об определении этой функции по некоторой информации о решениях задач Коши для дифференциального уравнения. Рассматриваются плоские волны, с резким фронтом распространяющиеся в однородной среде в направлении единичного вектора ν и падающие на неоднородность, локализованную внутри некоторого шара $B(R)$. Предполагается, что решения задач могут быть измерены в точках границы этого шара в моменты времени, близкие к приходу фронта волны для всевозможных значений вектора ν. Проводится исследование прямой задачи, устанавливается существование ограниченного решения в окрестности характеристического клина, выводится амплитудная формула на фронте волны для производной по t от решения задачи. Показывается, что решение обратной задачи редуцируется к серии задач рентгеновской томографии.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, плоские волны, рентгеновская томография, единственность

DOI: 10.31857/S2686954322030092

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{tt} - \Delta u - f(x,u) = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^4; \\ u|_{t<0} = g(t + t_0 - x \cdot \nu), \end{gathered} \tag{1}$$

в которой $f(x,u)$ – гладкая функция переменных x, u, финитная по $x \in \mathbb{R}^3$, а $g(t)$ является при $t = 0$ разрывной функцией, $g(+0) = \alpha > 0$ и $g(t) = 0$ при $t < 0$. Относительно функции $g(t)$ дополнительно предположим, что ее структура такова: $g(t) = \alpha > 0$ для значений $t \in [0, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, а при $t > \varepsilon$ произвольна (в частности, может быть $g(t) = 0$ при $t > \varepsilon$). Параметр α может меняться, пробегая некоторое множество значений. В (1) $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор, принадлежащий единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Смысл параметра t_0 будет объяснен чуть ниже. В поставленной выше задаче ν и α играют роль параметров. Поэтому ее решение обозначим через $u(x,t,\alpha,\nu)$, подчеркнув тем самым его зависимость от этих параметров. Однако при исследовании задачи (1) зависимость решения от ν и α будет для краткости опускаться.

В дальнейшем нас будет интересовать задача об определении функции $f(x,u)$ по некоторой информации о решениях задачи (1). В связи с этим сделаем некоторые предположения о функции $f(x,u)$, в рамках которых будет проведено все дальнейшее рассмотрение.

Предположения.

1) носитель функции $f(x,u)$ при любом значении $u \geq 0$ содержится в шаре $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| < R\}$, $R > 0$,

2) функции $f(x,u)$, $f_u(x,u)$ являются непрерывными для $(x,u) \in B(R) \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geq 0\}$,

3) $|f(x,u)| \leq f_0(u)$, $f_0 \in C(R_+)$, $f_0(0) = 0$, $f_0(u) > 0$ для $u > 0$,

4) при любом $K \in (0,\infty)$ существует положительная постоянная $M = M(K)$, такая что имеет место оценка

$$|f_u(x,u)| \leq M(K), \qquad (x,u) \in B(R) \times [0,K]. \tag{2}$$

Обозначим $S_+(R,\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = R, x \cdot \nu > 0\}$. Положим в (1) $t_0 = \inf_{x \in B(R)} = (x \cdot \nu) = -R$. Урав-

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*

**E-mail: romanov@math.nsc.ru*

нение $u = g(t + t_0 - x \cdot \nu)$ описывает в однородном пространстве (при $f(x,u) \equiv 0$) плоскую волну, бегущую в направлении вектора ν. В момент времени $t = 0$ фронт этой волны касается области $B(R)$, в которой сосредоточена неоднородность.

Обратная задача. Найти $f(x,u)$ в области $x \in B(R)$, $u \in (0,U]$ по следующей информации о решениях задачи (1):

$$u(x,t,\nu,\alpha) = h(x,t,\nu,\alpha), \quad \text{для всех} \quad \nu \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R,\nu), \quad t \in (0, x \cdot \nu - t_0 + \varepsilon, \alpha \in (0,U], \tag{3}$$

где $h(x,t,\nu,\alpha)$ – заданная функция и ε – произвольное малое положительное число.

Обратные задачи об определении коэффициентов в нелинейных гиперболических уравнениях интенсивно изучаются в последние годы (см. [1–9]). Настоящая работа основана на идее разложения решения по особенностям в окрестности фронта волны, использованной, в частности, в статьях [10–13].

Теорема 1. *Пусть* $\nu \in \mathbb{S}^2$, $\alpha > 0$ *и функции* $f(x,u)$ *и* $g(t)$ *удовлетворяют сделанным выше предположениям. Тогда вблизи характеристического клина* $t = x \cdot \nu - t_0$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1) и оно представимо в виде*

$$u(x,t) = \alpha H(t + t_0 - x \cdot \nu) + [\beta(x,\nu,\alpha) + \bar{u}(x,t)]H_1(t + t_0 - x \cdot \nu), \tag{4}$$

в котором $H(t)$ *– функция Хевисайда:* $H(t) = 1$ *для* $t \geq 0$ *и* $H(t) = 0$ *для* $t < 0$ *и* $H_1(t) = tH(t)$, *а функция* $\beta(x,\nu,\alpha)$ *вычисляется по формуле*

$$\beta(x,\nu,\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(x - s\nu,\alpha)ds. \tag{5}$$

В этой формуле ds – элемент евклидовой длины, а функция $\bar{u}(x,t)$ в (4) является непрерывной по своим арументам и бесконечно малой при $t \to x \cdot \nu - t_0 + 0$.

Доказательство этой теоремы состоит из цепочки лемм.

В однородной среде (т.е. при $f(x,u) \equiv 0$) решение задачи (1) имеет вид $u(x,t) = g(t + t_0 - x \cdot \nu)$. Из формулы Кирхгофа для неоднородного волнового уравнения следует, что решение задачи (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,t) = g(t + t_0 - x \cdot \nu) + \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi - x| \leq t} \frac{f(\xi, u(\xi, t - |\xi - x|))}{|\xi - x|}d\xi, \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Так как $g(t + t_0 - x \cdot \nu) = 0$ для $t < x \cdot \nu - t_0$ и $f(x,0) = 0$, то $u(x,t) = 0$ при $0 \leq t < x \cdot \nu - t_0$. Поэтому из (6) следует уравнение

$$u(x,t) = g(t + t_0 - x \cdot \nu) + \frac{1}{4\pi}\int_{D(x,t,\nu)} \frac{f(\xi, u(\xi, t - |\xi - x|))}{|\xi - x|}d\xi, \quad t \geq x \cdot \nu - t_0, \tag{7}$$

в котором $D(x,t,\nu)$ – область, ограниченная осесимметричным параболоидом

$$P(x,t,\nu) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi \cdot \nu + |\xi - x| = t + t_0\}$$

с центральной осью, проходящей через x и направленной в сторону вектора $-\nu$.

Введем в рассмотрение семейство параболоидов

$$P(x,\tau,\nu) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi \cdot \nu + |\xi - x| = \tau + t_0\}$$

для $\tau \in (x \cdot \nu - t_0, t]$.

Наряду с декартовой системой координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 рассмотрим систему координат y_1, y_2, y_3 с центром в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ и единичными ортами e_1, e_2, e_3:

$$e_3 = \nu = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

$$e_1 = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),$$

$$e_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0).$$

В выписанных выше формулах $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Кроме того, введем цилиндрическую систему координат z, r, ψ, связанную с системой y_1, y_2, y_3 равенствами $y_1 = r\cos\psi$, $y_2 = r\sin\psi$, $y_3 = z$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Тогда

$$\xi = x + y, \quad y = e_2 r\cos\psi + e_3 r\sin\psi + e_3 z, \tag{8}$$

и уравнение, определяющее параболоид $P(x,\tau,\nu)$, принимает вид:

$$P(x,\tau,\nu) = \{(r,z) : z + (z^2 + r^2)^{1/2} = \tau + t_0 - x \cdot \nu\},$$

или

$$r = \sqrt{(\tau + t_0 - x \cdot \nu)(\tau + t_0 - x \cdot \nu - 2z)}. \tag{9}$$

Следовательно, при $\tau \to x \cdot \nu - t_0 + 0$ параболоид $P(x,\tau,\nu)$ вырождается в луч $L(x, \nu) =: \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi = x + z\nu, z \leq 0\}$.

В равенстве (7) вместо переменных интегрирования ξ_1, ξ_2, ξ_3 введем криволинейные координаты τ, z, ψ. Тогда

$$\frac{d\xi}{|x-\xi|} = \frac{dy}{|y|} = d\tau dz d\psi.$$

Поэтому уравнение (7) принимает вид

$$u(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)} f(\xi, u(\xi, t-|\xi - x|))d\psi dz d\tau = \\ = g(t+t_0 - x\cdot\nu) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{(\tau+t_0-x\cdot\nu)/22\pi}\int\limits_{0} u(\xi, u(\xi, t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau, \\ t \ge x\cdot\nu - t_0, \tag{10}$$

в котором переменная ξ определена формулами (8) и (9).

Определим последовательность $u_k(x,t)$, $k = 0$, 1, ..., формулой:

$$u_0(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu),$$

$$u_k(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)} f(\xi, u_{k-1}(\xi, t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau, \tag{11}$$

$$k = 1,2,\ldots, \quad t \ge x\cdot\nu - t_0.$$

Пусть $F(u)$ – фиксированная первообразная для функции $1/f_0(u)$. При этом $F'(u) = \dfrac{1}{f_0(u)}$. Обозначим через $F^{-1}(p)$ обратную функцию к $p = F(u)$ для $u > 0$. Тогда

$$\frac{d}{dp}F^{-1}(p) = f_0(F^{-1}(p)). \tag{12}$$

Пусть ε – фиксированное число из интервала $(0, (F(2\alpha) - F(\alpha)))$. Обозначим

$$G(\nu,\varepsilon) = \{(x,t)|0 \le R(t+t_0 - x\cdot\nu) \le \varepsilon\}.$$

Лемма 1. *Пусть $g(t) = \alpha > 0$ для $t \in [0, \varepsilon/R]$, а функция $f(x,u)$ удовлетворяет сделанным выше предположениям. Тогда в области $G(\nu,\varepsilon)$ последовательность $u_k(x,t)$ удовлетворяет оценке:*

$$0 < u_k(x,t) \le F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)), \\ (x,t) \in G(\nu,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{13}$$

Действительно, в силу монотонности функции $F(u)$, имеем

$$0 < u_0(x,t) = g(t+t_0 - x\cdot\nu) = \\ = \alpha \le F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)), \\ (x,t) \in G(\nu,\varepsilon).$$

Далее,

$$u_1(x,t) \le \alpha + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + \\ + R(t - |\xi - x| + t_0 - \xi\cdot\nu)))d\psi dz d\tau = \\ = \alpha + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + \\ + R(t-\tau)))d\psi dz d\tau \le \\ \le \alpha + R\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau)))d\tau = \\ = F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)), \quad (x,t) \in G(\nu,\varepsilon).$$

Последнее равенство в этой цепочке соотношений получается, если сделать замену переменной τ на новую переменную $s = F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau))$ и проверить, используя (12), что

$$Rf_0(F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau)))d\tau = -ds.$$

С помощью подобных же вычислений проверяется положительность $u_1(x,t)$ в области $G(\nu,\varepsilon)$:

$$u_1(x,t) \ge \alpha - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + \\ + R(t - |\xi - x| + t_0 - \xi\cdot\nu)))d\psi dz d\tau \ge \\ \ge \alpha - R\int\limits_{x\cdot\nu - t_0}^{t} f_0(F^{-1}(F(\alpha) + R(t-\tau)))d\tau = \\ = 2\alpha - F^{-1}(F(\alpha) + R(t+t_0 - x\cdot\nu)) > \\ > 2\alpha - F^{-1}(F(\alpha) + \varepsilon)) > 0, \quad (x,t) \in G(\nu,\varepsilon).$$

В точности такие же вычисления показывают справедливость оценок (13) при любых k.

Следствие 1. *При выполнении условий леммы 1 последовательность $u_k(x,t)$ является равномерно ограниченной в области $G(\nu,\varepsilon)$, причем для всех k выполнено неравенство:*

$$0 < u_k(x,t) \le 2\alpha, \quad (x,t) \in G(\nu,\varepsilon), \\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

Лемма 2. *В условиях Леммы 1 последовательность $u_k(x,t)$ равномерно сходится в области $G(\nu,\varepsilon)$ и опре-*

деляет в этой области непрерывную предельную функцию $u(x,t)$.

Введем в рассмотрение разности

$$v_k(x,t) = u_k(x,t) - u_{k-1}(x,t), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Из формулы (11) следуют равенства

$$v_1(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{P(x,t,\nu)} f(\xi,u_0(\xi,t-|\xi-x|))d\varphi dz d\tau,$$

$$v_k(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{P(x,t,\nu)} v_{k-1}(\xi,t-|\xi-x|)\times \tag{15}$$

$$\times Q(u_{k-1}(\xi,t-|\xi-x|),u_{k-2}(\xi,t-|\xi-x|))d\varphi dz d\tau,$$
$$k = 2,3,\ldots.$$

В формуле (15) функция $Q(u_{k-1},u_{k-2})$ определена равенством

$$Q(u_{k-1},u_{k-2}) = \int\limits_0^1 f_u(\xi,u_{k-1}s + u_{k-2}(1-s))ds. \tag{16}$$

Из формул (11) вытекает оценка

$$|v_1(x,t)| \le Rf_0(\alpha)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t} d\tau = Rf_0(\alpha)(t+t_0-x\cdot\nu),$$
$$(x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Величина $Q(u_{k-1},u_{k-2})$ легко оценивается на основе следствия 1 и неравенства (2):

$$|Q(u_{k-1},u_{k-2})| \le M(2\alpha).$$

Полагая в формуле (15) $k = 2$, находим, что

$$|v_2(x,t)| \le \frac{Rf_0(\alpha)M(2\alpha)}{4\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{P(x,\tau,\nu)\cap B(R)}(t+t_0-\xi\cdot\nu-|\xi-x|)d\varphi dz d\tau \le$$

$$\le R^2 f_0(\alpha)M(2\alpha)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}(t-\tau)d\tau =$$

$$= R^2 f_0(\alpha)M(2\alpha)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)^2}{2!}, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Продолжая процесс оценок разностей $v_k(x,t)$, находим, что

$$|v_k(x,t)| \le R^k f_0(\alpha)M^{k-1}(2\alpha)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)^k}{k!}, \tag{17}$$
$$k = 2,3,\ldots, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Из оценки (17) вытекает равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,t)$ в области $G(\nu,\varepsilon)$. Это доказывает также равномерную сходимость последовательности $u_k(x,t)$ в той же самой области. Так как, очевидно, все $u_k(x,t)$ положительны и непрерывны в этой области, то предел этой последовательности определяет положительную функцию $u(x,t)$, которая является непрерывным для $(x,t)\in G(\nu,\varepsilon)$ решением задачи (1).

Следствие 2. *Предельная функция* $u(x,t)$ *последовательности* $u_k(x,t)$ *является непрерывным решением уравнения (10) в области* $G(\nu,\varepsilon)$, *и для нее выполнено неравенство:*

$$0 < u(x,t) \le 2\alpha, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon). \tag{18}$$

Лемма 3. *В области* $G(\nu,\varepsilon)$ *уравнение (10) имеет единственное непрерывное решение.*

Пусть существуют два решения $u_k(x,t)$, $k = 1, 2$, положительные, непрерывные и ограниченные в области $G(\nu,\varepsilon)$ некоторой постоянной K. Обозначим $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t,(x,t\nu)$. Запишем равенство (10) для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ и найдем соотношение для их разности, используя представление (16). В результате получим

$$w(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{(\tau+t_0-x\cdot\nu)/2}\int\limits_0^{2\pi} w(\xi,t-|\xi-x|)\times \tag{19}$$
$$\times Q(u_1(\xi,t-|\xi-x|,u_2(\xi,t-|\xi-x|)d\psi dz d\tau.$$

В силу (16) имеет место оценка $|Q(u_1,u_2)| \le M(K)$. Так как $|w(x,t)| \le K$, а интервал интегрирования по переменной z, в силу финитности функции $f(x,u)$, не превосходит $2R$, то из (19) получим

$$|w(x,t)| \le KRM(K)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t} d\tau = \tag{20}$$
$$= KRM(K)(t+t_0-x\cdot\nu), \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Подставляя (20) в равенство (19), получаем новую оценку

$$|w(x,t)| \le KR^2M^2(K)\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}(t-\tau)d\tau =$$

$$= KR^2M^2(K)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)^2}{2!}, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

Повторяя этот процесс итераций n раз, приходим к оценке

$$|w(x,t,\nu)| \le KR^n M^n(K)\frac{(t+t_0-x\cdot\nu))^n}{n!}, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon). \tag{21}$$

Поскольку правая часть равенства (21) равномерно стремится к нулю в области $G(\nu,\varepsilon)$ при $n\to\infty$, то $w(x,t)=0$ в этой области. Следовательно, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ для всех $(x,t)\in G(\nu,\varepsilon)$.

Лемма 4. *При выполнении условий леммы 1 решение задачи (1) представимо в области $G(\nu,\varepsilon)$ в виде (3).*

Введем новую функцию $v(x,t)=u(x,t)-\alpha$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$v(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x\cdot\nu-t_0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{(\tau+t_0-x\cdot\nu)/2}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\alpha+ + v(\xi,t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon). \tag{22}$$

Сделаем в интеграле замену переменной τ на τ_1:

$$\tau = x\cdot\nu-t_0+(t+t_0-x\cdot\nu)\tau_1,$$

тогда уравнение (22) примет вид

$$v(x,t)=\frac{(t+t_0-x\cdot\nu)}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{(t+t_0-x\cdot\nu)\tau_1/2}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\alpha+ + v(\xi,t-|\xi-x|))d\psi dz d\tau_1, \quad (x,t)\in G(\nu,\varepsilon).$$

При $t\to x\cdot\nu-t_0+0$ имеют место предельные соотношения $\xi=x+z\nu$, а параболоид $P(x,\tau,\nu)$ вырождается в луч

$$L(x,\nu)=\{\xi\in\mathbb{R}^3\,|\,\xi=x+z\nu, z\le 0\}.$$

Таким образом, функция $v(x,t)$ равномерно стремится к нулю при $t\to x\cdot\nu-t_0+0$. Поэтому

$$\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{(t+t_0-x\cdot\nu)\tau_1/2}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi,\alpha+v(\xi,t-|\xi-x|)d\psi dz d\tau_1 = = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+z\cdot\nu,\alpha)dz + o(t+t_0-x\cdot\nu), \quad t\to x\cdot\nu-t_0+0. \tag{23}$$

Используя (23), равенство (22) можно записать в виде

$$v(x,t)=(t+t_0-x\cdot\nu)\times\left(\frac{1}{2}\int\limits_{L(x,y)} f(x+z\cdot\nu,\alpha)dz+\overline{v}(x,t)\right), \quad t\ge x\cdot\nu-t_0,$$

где $\overline{v}(x,t)=o(t+t_0-x\cdot\nu)$ при $t\to x\cdot\nu-t_0+0$.

Так как $u(x,t)=v(x,t)+\alpha$ и $u(x,t)=0$ для $t\le x\cdot\nu-t_0$, то отсюда следует представление (3), в котором

$$\overline{u}(x,t,\nu)=\overline{v}(x,t,\nu)=o(t-x\cdot\nu) \quad \text{при} \quad t\to x\cdot\nu-t_0+0.$$

В силу теоремы 1 и формул (4), (5), информация (3) определяет интегралы

$$\int\limits_0^\infty f(x-s\cdot\nu,\alpha)ds = p(x,\nu,\alpha) \quad \text{для всех} \quad \nu\in\mathbb{S}^2, \quad x\in S_R^+(\nu), \alpha\in(0,U], \tag{24}$$

в которых функция $p(x,\nu.\alpha)$ вычисляется по формуле

$$p(x,\nu,\alpha)=2\lim_{t\to x\cdot\nu-t_0+0}\frac{\partial h}{\partial t}(x,t,\nu,\alpha) = = 2h_t(x,x\cdot\nu-t_0+0,\nu,\alpha).$$

Таким образом, при любом фиксированном значении $\alpha\in(0,U]$ известны интегралы по всем прямым пересекающим область $B(R)$. В результате задача об определении $f(x,\alpha)$ при каждом фиксированном значении α по информации (3) сводится к задаче рентгеновской томографии (см., например, [14]). Известно, что решение такой задачи единственно. В связи с этим верна следующая теорема единственности.

Теорема 2. П*усть выполнены условия теоремы 1. Тогда обратная задача может иметь только одно решение.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
2. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.*, Comm. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
3. *Barreto A.S.* Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14. № 6. P. 1057–1105.
4. *Lassas M.* Proc. Int. Congress of Math. ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil. 2018. V. III. P. 3739–3760.
5. *Stefanov P., Barreto A.S.* arXiv:2102.06323. 2021.

6. *de Hoop M., Uhlmann G., Wang Y.* Mathematische Annalen. 2020. V. 376. № 1–2. P. 765–795.
7. *Wang Y., Zhou T.* Comm. PDE. 2019. V. 44. № 11. P. 1140–1158.
8. *Uhlmann G., Zhai J.* Discrete & Continuous Dynamical Systems - A. 2021. V. 41. № 1. P. 455–469.
9. *Barreto A.S., Stefanov P.* arXiv: 2107.08513v1. [math. AP] 18 Jul 2021.
10. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* Eurasian J. of Math. and Comp. Appl. 2015. V. 3. № 1. P. 48–63.
11. *Романов В.Г.* Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
12. *Романов В.Г.* Доклады АН. 2021. Т. 496. № 1. С. 53–55.
13. *Романов В.Г.* Доклады АН. 2021. Т . 501. № 6. С. 79–83.
14. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990, 279 с.

AN INVERSE PROBLEM FOR SEMI-LINEAR WAVE EQUATION

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov[a]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 630090, Russian Federation*

For equation $u_{tt} - \Delta u - f(x,u) = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^4$, where $f(x,u)$ is a smooth function of their variables and compact in x, an inverse problem of recovering this function from a given information on solutions of Cauchy problems for the differential equation is studied. Plane waves with strong front that propagate in homogeneous medium in the direction of the unit vector ν and then fall down on the inhomogeneity localized inside some ball $B(R)$ are considered. It is supposed that solutions of Cauchy problems can be measured on the boundary of this ball for all ν at the time close to arriving time of the front. The forward Cauchy problem is studied and existence of the unique bounded solution in a vicinity of a characteristic wedge is stated. An amplitude formula for the derivative of the solution with respect to t on the front of the wave is derived. It is demonstrate that the solution of the inverse problem reduces to the well known X-ray tomography.

Keywords: semilinear wave equation, plane waves, X-ray tomography