ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 504, с. 51–55

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ

© 2022 г. В. В. Веденяпин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 27.01.2022 г.
После доработки 29.03.2022 г.
Принято к публикации 12.04.2022 г.

В классических работах уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но более общего принципа наименьшего действия и применяем уравнения типа Гамильтона–Якоби для получения космологических решений.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона

DOI: 10.31857/S2686954322330013

1. ВВЕДЕНИЕ

В классических работах (см. [1–4]) уравнения для полей даются без вывода правых частей. Здесь мы предлагаем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия и применяем уравнения Гамильтона–Якоби для получения космологических решений. Таким образом, мы впервые получаем вывод тензора энергии-импульса и замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики из принципа наименьшего действия.

2. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$ функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in\mathbb{R}$ и заряду $e\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned}S = &-c\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\,d^3xd^3v\,dmdedt - \\ &-\frac{1}{c}\int ef(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)A_{\mu}u^{\mu}d^3xd^3v\,dmdedt + \\ &+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x,\end{aligned} \tag{1}$$

где c – скорость света, $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ $(i = 1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i $(i = 1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, $A_{\mu}(\mathbf{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x},t) = \partial A_{\mu}(\mathbf{x},t)/\partial x^{\nu} - \partial A_{\nu}(\mathbf{x},t)/\partial x^{\mu}$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\frac{1}{16\pi c}$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_{μ}. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5–11]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{aligned}&k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ &= \int m\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}}}u^{\mu}u^{\nu}d^3v\,dmde - \frac{1}{2}k_2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}.\end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] *ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: vicveden@yahoo.com*

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [9–11] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [5–15]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int e u^\mu f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e) d^3 v dm de. \tag{3}$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1–4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ-функции для одной частицы:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x},\mathbf{v},m,e,t) = \\ = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'(t))\delta(m-m')\delta(e-e'). \end{gathered} \tag{4}$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1–4] выражения для всех слагаемых:

$$\begin{gathered} S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu(\mathbf{x},t)u^\mu dt + \\ + k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \end{gathered} \tag{5}$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1–4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

3. ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ И УРАВНЕНИЮ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Для вывода уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна в форме Гамильтона–Якоби нужно вывести его в импульсах [16–19]. Схема вывода уравнений типа Власова – это вывод уравнений для полей при заданном движении частиц и вывод уравнений движения частиц в заданных полях с переходом к уравнениям Лиувилля – следует общей схеме классических учебников [1–4]. Имеем часть действия (5) для движения частиц в заданных полях:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt.$$

Мы получим уравнение движения:

$$\begin{gathered} -cm\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{i\beta}u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c}A_i\right] = \\ = -cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^\eta v^\xi}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}u^\mu u^\nu - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^i}u^\mu. \end{gathered}$$

Латинские индексы $i, j, k\ldots$ пробегают значения 1, 2, 3, а греческие $\mu, \nu\ldots$ пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Мы получаем выражение для импульсов:

$$q_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c}A_\mu. \tag{6}$$

Здесь выражение для q_0 получается формальным дифференцированием по $u^0 = c$.

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы $p_\mu = q_\mu - \frac{e}{c}A_\mu = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}$: формулы связи со скоростями проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона–Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем:

$$p^\beta = -mc\frac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим β-ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p_0:

$$p_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где $\quad a = g^{00}, \quad b = 2p_i g^{0i}, \quad c = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2.$

При этом для согласования с нерелятивистской динамикой берется знак минус.

Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений для исключения скоростей с учетом $u^0 = c$

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}$$

в формулу (6) при $\mu = 0$ (см. [1–4]).

Уравнение для полей останется тем же самым (2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{v}dmde = f(t,\mathbf{x},\mathbf{q},m,e)dqdmde = f(t,\mathbf{x},\mathbf{p},m,e)\,d\mathbf{p}dmde$. Каждая из трех этих величин – это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных.

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} =$$
$$= c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},q,m,e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}u^\mu u^\nu d^3qdmde - \frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$
$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int eu^\mu f(t,\mathbf{x},q,m,e)\,d^3qdmde.$$

Или

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} =$$
$$= c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},q,m,e)}{2}\frac{cp^\mu p^\nu}{(q^0)(mc)^2}d^3qdmde - \tag{7}$$
$$-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}.$$
$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} =$$
$$= \frac{1}{c^2}\int e\frac{cp^\mu}{p^0}f(t,\mathbf{x},q,m,e)d^3qdmde.$$

Здесь имеется в виду, что скорости в первом уравнении, а импульсы p^μ во втором должны быть выражены через канонические импульсы q_μ.

Уравнение движения для частиц получаем уже в Гамильтоновой форме, где функция Гамильтона $H = -c\dfrac{\partial L}{\partial u^0} = -cq_0$. Эта формула получается из-за того, что Лагранжиан для действия $S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt - \dfrac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt$ есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера $u^\mu\dfrac{\partial L}{\partial u^\mu} - L = 0$. Так как по определению $H = u^i\dfrac{\partial L}{\partial u^i} - L$, получаем $c\dfrac{\partial L}{\partial u^0} + H = 0$. Здесь имеется в виду суммирование по $i = 1, 2, 3$ и по $\mu = 0, 1, 2, 3$. Отсюда находим выражения для скоростей $u^i = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = u^i(q) = -c\dfrac{\partial q_0}{\partial q_i}$.

Выписываем через этот гамильтониан уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - c\frac{\partial q_0}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial q_i} = 0\,. \tag{8}$$

И получаем замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики Власова–Максвелла–Эйнштейна в импульсах (7)–(8). По общей схеме работ [16–20] получаем гидродинамическое следствие системы (7)–(8) гидродинамической подстановкой $f(t,x,q,m,e) = \rho(x,t,m,e)\delta(q - Q(q,t,m,e))$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(Q)\rho) = 0, \tag{9}$$
$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} - c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}(x,Q)\frac{\partial Q_k}{\partial x^i} + c\frac{\partial q_0}{\partial x^k} = 0. \tag{10}$$

Подстановкой $Q_\alpha = \dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ или $P_\alpha = \dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \dfrac{e}{c}A_\alpha$ получаем затем уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}A_\beta\right)g^{\alpha\beta} = (mc)^2. \tag{11}$$

Мы также должны переписать уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(\nabla W)\rho) = 0. \tag{12}$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона–Якоби–Власова–Максвелла–Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку $f(t,x,q,m,e) = \rho(x,t,m,e)\delta(q - Q(x,t,m,e))$:

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} =$$
$$= c\int m\frac{\rho(t,x,m,e)}{2}\frac{cP^\mu P^\nu}{(P^0)(mc)^2}dmde - \tag{13}$$
$$-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$
$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{c^2}\int e\frac{cP^\mu}{P^0}\rho(t,\mathbf{x},m,e)dmde.$$

Здесь макроскопические импульсы P^μ и P_μ связаны обычными соотношениями $P_\mu = g_{\mu\nu}P^\nu$. При этом в форме Гамильтона–Якоби нужно учитывать, что $P_\alpha = \dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \dfrac{e}{c}A_\alpha$. Мы получили уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным, (9), (10), (13), так и в редукции к уравнениям Гамильтона–Якоби (11)–(13). В принципе можно рассматривать космологическую задачу и в общем случае, но выражения будут громоздкими, поэтому рассмотрим примеры специальных релятивистских систем.

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S = -cm\int\left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c}\right)dt -$$
$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с Гамильтонианом [1–4]

$$H(x,q) = c\sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S = -c\int m\left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + U\right) f(x,p,t,m)d\mathbf{p}dmdxdt -$$
$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t,x,q,m,e)dqdmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона–Якоби и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma\displaystyle\int m\rho dmde - \dfrac{c^2\Lambda}{2}. \end{cases}$$

где $v^i(q) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}.$

Мы получили выражение для скорости, из которого видно Хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень:

$$S = -cm\int\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U}dt -$$
$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x,q,t) = c\sqrt{((mc)^2 + q^2)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)\left(1 + \dfrac{2U}{c^2}\right)} = 0 \\ \Delta U = 4\pi\gamma\displaystyle\int\frac{m\rho(m,x,t)}{\sqrt{c^2 - (v(\nabla W))^2 + U}}dm - \dfrac{c^2\Lambda}{2}, \end{cases}$$

где $v^i(q) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{cq^i\sqrt{1 + \dfrac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}.$

Мы получили снова замкнутую систему уравнений, из которой видно происхождение корня в правой части уравнения Эйнштейна, а также выражение для скорости, из которой видно хаббловское расширение. И возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5–15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна была получена для скоростей [20, 21], а здесь для импульсов, что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона–Якоби. Интерес представляют стационарные решения полученных уравнений, как это делалось для уравнений Власова–Пуассона [22]. В работах [20, 21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где была выведена и обобщена модель Милна–Маккри [23, 24]. На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна $U(r) = -\dfrac{\gamma}{r} + ar^2$ [25], где второе слагаемое связано с лямбда-членом Эйнштейна. Представляет значительный интерес проделать ту же работу для предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слаборелятивистских приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова. Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. *Choquet-Bruhat Y.* General relativity and Einstein's Equations. New York: Oxford University Press, 2009.
9. *Игнатьев Ю.Г.* Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов. Казань. ООО “Фолиант”, 2010.
10. *Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., L.C. Shepley L.C.* Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov–Einstein Systems. Physical Review D 84, 024011 (11pp) (2011).
11. *Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J.* Theory and Applications of the Vlasov Equation. European Journal of Physics D **69**, 68 (3pp) (2015). March.
12. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. *Choquet-Bruhat Y., Damour T.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press, 2015.
14. *Rein G., Rendall A.D.* Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data, Commun. Math. Phys. 1992. V. 150. P. 561–583.
15. *Kandrup H.E., Morrison P.J.* Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters. Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. *Козлов В. В.*, Общая теория вихрей, Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239 с.
17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. *Аржаных И.С.,* Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.; англ. пер.: Arzhanykh I.S., Momentum-fields, Nat. LendingLib., BostonSpa, Yorkshire, 1971, 222 pp.
19. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.
20. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН. 2020. Т. 495. С. 9–13.
21. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system. European Physical Journal Plus. 2021. V. 136. № 670.
22. *Веденяпин В.В.* Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 777–780.
23. *Milne E.A.* Relativity, Gravitation and World–Structure. Oxford Univ. Press, 1935.
24. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 1934. V. 5. № 73.
25. *Gurzadyan V.G.*, The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory. 1985. V. 105. № 42.

ON DERIVATION OF EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS AND GRAVITATION FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, HAMILTON–JACOBI METHOD AND COSMOLOGICAL SOLUTIONS

V. V. Vedenyapin[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russian Federation*

Presented by Academician of RAS V.V. Kozlov

In classical texts equations for fields are proposed without derivation of the right-hand sides. Here we suggest the derivation of the right-hand sides of the Maxwell and Einstein equations in the framework of Vlasov–Maxwell–Einstein equations from the classical, but slightly more general principle of least action and use Hamilton-Jacobi equations for cosmological solutions .

Keywords: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation